



Modélisation de conflits et calcul de bornes dans les systèmes de production par la théorie des diïdes

Olivier Boutin

► To cite this version:

Olivier Boutin. Modélisation de conflits et calcul de bornes dans les systèmes de production par la théorie des diïdes. Modélisation et simulation. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2009. Français. NNT: . tel-00502840

HAL Id: tel-00502840

<https://theses.hal.science/tel-00502840>

Submitted on 15 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Centrale de Nantes

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION ET DE MATHÉMATIQUES

Année 2009

N°

Thèse de Doctorat

Diplôme délivré par l'École Centrale de Nantes

Spécialité : GÉNIE INFORMATIQUE, AUTOMATIQUE ET TRAITEMENT DU
SIGNAL

Présentée et soutenue publiquement par :

OLIVIER BOUTIN

*le 15 octobre 2009
à l'École Centrale de Nantes*

TITRE

**Modélisation de conflits et calcul de bornes dans
les systèmes de production par la théorie des
diïodes**

Jury

Président :	Abdellah EL MOUDNI	Professeur Université Technologique de Belfort-Montbéliard, Belfort
Rapporteurs :	Isabel DEMONGODIN Stéphane GAUBERT	Professeur Université Paul Cézanne, Marseille Directeur de Recherche INRIA, Saclay
Examineurs :	Bertrand COTTENCEAU	Maître de Conférences Université d'Angers, Angers
	Anne L'ANTON	Maître de Conférences Université de Nantes, Carquefou
	Jean Jacques LOISEAU	Directeur de Recherche CNRS, Nantes

Directeur de thèse : Jean Jacques LOISEAU
Laboratoire : IRCCyN UMR CNRS 6597
Co-encadrants : Anne L'ANTON et Bertrand COTTENCEAU
Laboratoires : IRCCyN UMR CNRS 6597 et LISA UPRES EA 4094

N° ED 503-063

Table des matières

Remerciements	9
Introduction générale	10
1 Préliminaires algébriques	15
1.1 Outils algébriques	16
1.1.1 Structures ordonnées et treillis	16
1.1.2 Éléments de la théorie des dioïdes	20
1.1.3 Liens entre dioïdes et treillis	22
1.2 Résolution d'équations dans un dioïde	24
1.2.1 Continuité et monotonie d'applications	25
1.2.2 L'étoile de Kleene et les équations au point fixe	26
1.2.3 Résolution d'inéquations particulières par résiduation	28
1.3 Structures particulières de dioïdes	31
1.3.1 Les dioïdes de séries formelles	31
1.3.2 Les dioïdes d'intervalles	32
1.4 Bilan	36
2 Modèles et systèmes linéaires	37
2.1 Modélisation graphique de systèmes à événements discrets	38
2.1.1 Les réseaux de Petri	38
2.1.2 Les principales sous-classes de réseaux de Petri	44
2.2 Théorie des systèmes linéaires	49
2.2.1 Représentation d'état	50
2.2.2 Représentation entrée-sortie de SED dans un dioïde	55
2.2.3 Fonctions et matrices de transfert d'un SED dans un dioïde	57
2.3 Composition de systèmes linéaires	68
2.3.1 Compositions parallèle et série	69
2.3.2 Mise en feedback	71
2.3.3 Autres formes de composition	73
2.4 Bilan	74
3 Modélisation d'un routage entre sous-systèmes parallèles	75
3.1 Le phénomène de routage	76
3.1.1 Formes de parallélisme	76
3.1.2 Fonctions de routage périodique	77
3.1.3 Réponse impulsionnelle d'un système comportant un rou- tage	80

3.1.4	État de l'art et intérêts de notre approche	82
3.2	Une borne inférieure pour le comportement du système global	84
3.3	Un majorant pour le comportement du système global	86
3.3.1	Routage équilibré entre sous-systèmes identiques	87
3.3.2	Routage équilibré entre sous-systèmes différents	91
3.3.3	Routage périodique entre deux sous-systèmes différents	93
3.4	Routage périodique optimal entre deux sous-systèmes différents	95
3.5	Cas d'application	96
3.6	Bilan	97
4	Modélisation de systèmes de production à ressources partagées	99
4.1	Ressources partagées et exclusion mutuelle	100
4.1.1	Principe d'une exclusion mutuelle	100
4.1.2	Notre politique d'affectation des ressources	101
4.1.3	État de l'art et intérêts de notre approche	103
4.2	Analyse par intervalles du partage d'une ou de plusieurs ressources	106
4.2.1	Partage d'une seule ressource entre deux sections simples soumises à temporisation	107
4.2.2	Généralisation au partage de plusieurs ressources	112
4.3	Partage de ressources entre des systèmes complexes linéaires	115
4.3.1	Calcul de la borne inférieure de l'intervalle	115
4.3.2	Théorie du second ordre et caractérisation du temps de séjour maximal dans un sous-système	116
4.3.3	Calcul du transfert du système global	119
4.4	Cas d'application	119
4.4.1	Convergence de convoyeurs gérée en exclusion mutuelle	119
4.4.2	Bassins de traitements partageant des conteneurs	122
4.5	Bilan	123
	Conclusion et perspectives	125
	Annexes	129
A	Compléments sur les systèmes linéaires	131
A.1	Hypothèses de fonctionnement et modèles algébriques	131
A.1.1	Conditions initiales canoniques	131
A.1.2	Mode de fonctionnement FIFO	132
A.1.3	Fonctionnement au plus tôt	133
A.2	Signaux et réponses impulsionnelles	134
A.2.1	Signaux et systèmes	135
A.2.2	Réponse impulsionnelle	138
A.2.3	Extension matricielle	141
A.3	Valeurs propres de matrices pour l'évaluation de performance	143
A.3.1	Définitions et propriétés	143
A.3.2	Considérations algorithmiques	146

B Compléments de bibliographie sur la théorie des dioïdes	149
B.1 Un historique de la théorie des dioïdes	149
B.1.1 Fondements théoriques	149
B.1.2 Premières diffusions de la théorie des dioïdes	150
B.1.3 Les autres écoles dans le monde	152
B.1.4 Contributions plus récentes	154
B.1.5 Bilan	155
B.2 Aspects algorithmiques du calcul de la valeur propre d'une ma- trice dans un dioïde	155
B.2.1 Algorithme de Karp et quelques dérivés	155
B.2.2 Autres types d'algorithmes	156
Bibliographie	159
Résumé et mots-clés en français et en anglais	171

Table des figures

1.1	Diagramme de Hasse de l'ensemble ordonné $(\{a, b, c, d\}, \preceq)$	17
1.2	Représentation de l'ensemble des majorants et minorants du sous-ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$	19
1.3	Graphe de précédence de la matrice A	28
2.1	Exemple de RdP marqué	40
2.2	Évolution du marquage d'un réseau de Petri	41
2.3	Exemple de graphe des marquages accessibles	42
2.4	Concurrences et synchronisations dans les RdP	42
2.5	Exemple de configuration interdite dans un RCL	45
2.6	Modèle GET d'un poste de travail	47
2.7	GET avec incertitudes temporelles minimal	48
2.8	Modèle GET d'un poste de travail avec incertitudes temporelles .	50
2.9	GET à deux entrées et une sortie (de type MISO)	51
2.10	GET à deux entrées et une sortie, dont le vecteur d'état a été augmenté (ajouts en rouge)	54
2.11	Interprétation graphique de la simplification d'écriture de séries .	60
2.12	Un hypographe	62
2.13	Meilleure approximation monotone d'une série de $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$	63
2.14	Représentation graphique des opérations sur des monômes	64
2.15	Représentation graphique de la pente asymptotique d'une application compteur	66
2.16	GET avec incertitudes temporelles représentant un système indéterministe	68
2.17	Compositions de systèmes linéaires	69
2.18	Mise en feedback	72
3.1	Deux manières de relier des lignes de production parallèles	76
3.2	Représentations de la fonction de routage $1 1 1$	80
3.3	Représentations de la fonction de routage $2 3$	80
3.4	Forme des systèmes à routage périodiques ou équilibrés	81
3.5	Interprétation graphique du produit de Hadamard de séries de $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$	87
3.6	Interprétation graphique du changement d'échelle d'une série de $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$	88
3.7	Équivalence entre $(h h)_{1 1}$ (a) et $\text{Ech}_2(h)$ (b)	92
3.8	Un atelier flexible possédant un routage en son sein	96
3.9	Réponse impulsionnelle des deux bornes de l'intervalle	98

4.1	Tronçon comportant une ressource partagée en quantité finie . .	101
4.2	Diagramme de principe de la règle d'affectation considérée . . .	103
4.3	Une ressource partagée entre deux postes de travail	107
4.4	Découplage du système à ressource partagée initial en GET pa- rallèles	110
4.5	Systèmes linéaires parallèles partageant des ressources	115
4.6	Prise en compte explicite du temps de séjour maximal dans un système	116
4.7	Ligne de transfert automatisée	120
4.8	Modèle RdP de la ligne de transfert	121
4.9	Bassins de traitements sous forme de réseau de Petri	123
A.1	Synchronisation et temporisation élémentaires	133

Liste des tableaux

1.1	Formules impliquant l'étoile de Kleene dans un dioïde	26
1.2	Formules impliquant la division dans un dioïde	30
3.1	Récapitulatif des approches utilisant des réseaux de Petri pour l'étude des routages	84
3.2	Récapitulatif de la caractérisation du comportement d'un routage	98
4.1	Récapitulatif des approches pour l'étude des partages de ressources	105

Remerciements

Les résultats présentés dans ce document parcouru par vos yeux intéressés sont l'aboutissement d'un travail de recherche effectué à cheval entre deux laboratoires, l'un à Nantes (l'IRCCyN¹) et l'autre à Angers (le LISA²), et majoritairement financé par la région des Pays de la Loire. Je profite de ce préambule pour remercier cette institution qui a jugé mon domaine de recherche avec intérêt, en considérant en particulier que mon travail était porteur de promesses, synthétisées dans ce document.

Je tiens à sincèrement remercier par ces quelques lignes mes encadrants pour leur soutien et leurs conseils, pour m'avoir remotivé quand j'en ai eu besoin et pour avoir défendu mes intérêts quand il l'a fallu. Je remercie particulièrement Jean Jacques Loiseau pour m'avoir guidé et donné les bons conseils durant la dernière ligne droite de mon doctorat (sans lui, ce mémoire n'aurait peut-être pas été fini à temps).

J'exprime ma gratitude à Isabel Demongodin et à Stéphane Gaubert pour avoir accepté de juger mon travail et être les rapporteurs de cette thèse. Je suis également reconnaissant à Abdellah El Moudni pour avoir présidé mon jury de soutenance.

J'adresse un grand merci à l'ensemble de mes collègues de travail, que ce soit en recherche à l'IRCCyN ou au LISA, où dans les différents départements d'enseignements à l'université de Nantes, dans lesquels j'ai eu la chance de pouvoir exercer quelques activités (le département QLIO à l'IUT ainsi que le département informatique à l'UFR sciences et techniques). Merci à Olivier (H.) Roux de l'IRCCyN pour son aide sur la formalisation de la sémantique des graphes d'événements temporisés avec incertitudes temporelles. J'ai fini par citer ton article!

Pour finir, je dédie ces remerciements à tous les gens que j'ai pu croiser avant ou pendant cette thèse et qui m'ont aidé, ou surtout retardé, dans mon travail. Sans tous les nommer, je me dois de citer au moins tous les salauds de Vladivostok³ et mes colocataires et « co-bureaux » successifs. Sans eux, je n'en serais jamais arrivé là. Merci aussi à Rick Hule, pour toute la pêche qu'il sait insuffler à tous ceux qui le côtoient.

Je n'oublie pas de remercier chaleureusement ma famille et mes amis pour leur très grande compréhension. Il est malheureux que certains membres de ma famille aient disparu avant l'aboutissement de ce travail, que j'aurai été fier de leur présenter. Une pensée toute particulière leur revient parmi toutes les personnes ayant compté pour moi.

1. <http://www.irccyn.ec-nantes.fr>

2. <http://www.istia.univ-angers.fr/LISA>

3. <http://www.vladprod.org/vladivostok>

Introduction générale

Un thème soulevé par l'étude des systèmes dynamiques est leurs comportements au cours du temps. On distingue dans ce cadre deux types de systèmes : ceux dont l'évolution est continue et décrite par des équations différentielles, et les systèmes à événements discrets. Ces derniers sont des systèmes conçus par l'homme, obéissant à des règles opérationnelles sous forme d'algorithmes, et dont l'état évolue à des instants discrets, en réponse à des événements ponctuels (typiquement l'arrivée d'un client, d'un signal ou l'achèvement d'une tâche).

Les systèmes de production forment une classe importante de systèmes à événements discrets. Ils présentent de nombreux phénomènes de synchronisation, de concurrence et de délai. Les défis actuels liés à une demande d'innovation permanente et à des critères environnementaux de plus en plus rigoureux poussent à un besoin grandissant de maîtrise de ces systèmes. Il est possible d'en réaliser une étude analytique, en basant les représentations d'état sur un ensemble de relations entre des données prises à des points de contrôles, où des capteurs détectent le passage de produits⁴, afin de compter ces passages ou leur donner une date. Il arrive que certains processus nécessitent la présence (synchronisée) de plusieurs produits. La mise en équations de ces processus fait intervenir naturellement les opérations de minimum et de maximum ; par exemple la date de début d'une réunion est le maximum des dates d'arrivée des participants. De la même façon, dans un problème d'assemblage, le nombre de produits finis qu'il est possible de réaliser est le minimum des nombres de pièces de chaque type disponibles. L'observation fondamentale est qu'il existe des structures algébriques où ces phénomènes de rendez-vous sont à la base des calculs, ce qui présente l'intérêt de rendre linéaires les équations dynamiques de comportement des processus. Ces structures sont des dioïdes, sur lesquels nous allons baser les contributions de cette thèse.

La théorie des dioïdes a fait l'objet d'un certain nombre de contributions depuis les années 50 [Shi54, CG60] et ses premières ébauches de formalisation datent de la fin des années 70 [GM77, GM78, CG79]. Depuis l'introduction de cette théorie, de nombreux efforts ont été entrepris afin de transposer ou d'adapter dans cette structure les concepts et résultats de la théorie des systèmes linéaires⁵. Sans être exhaustif, il est possible de citer certains résultats existants : les problèmes de représentations d'état ont été abordés, ainsi que le concept de transfert, introduit par l'intermédiaire de transformées comparables à la transformée en z de la théorie des systèmes en temps dis-

4. nous allons par la suite utiliser le terme générique « produit », qu'il s'agisse d'une pièce élémentaire, d'un produit fini ou semi-fini, d'un composant, d'un composé ou de matière première

5. voir à ce propos la section B.1 en annexe

cret [CMQV84]. Des méthodes d'analyse spectrale ont également été développées. Ces méthodes fournissent des éléments d'évaluation de performance du système à événements discret modélisé [GM77]. Certains problèmes de commande ont pu être résolus pour ces systèmes. On peut par exemple mentionner la commande en juste-à-temps [CHBF99], ainsi que la commande avec modèle de référence [CHBF01, AMHSMC03]. Plus récemment, nous pouvons citer la définition du dioïde d'intervalles, qui permet d'intégrer la notion d'incertitude de valeurs, c'est-à-dire des approximations (garanties), et sur lequel nos contributions sont essentiellement basées [LS01, LHCJ04].

Le travail présenté dans cette thèse se situe dans la continuité de ces travaux. Il est à constater que certains systèmes de production ne sont pas aisément analysables par cette théorie. En particulier, les systèmes comportant des conflits nécessitent de prendre des décisions, de manière statique ou dynamique.

La contribution de cette thèse est de proposer une modélisation approchée de ces systèmes en les considérant dans des intervalles dont les bornes définissent des modèles établis sur un dioïde approprié. Cette approche est basée sur des dioïdes d'intervalles dont les bornes décrivent les comportements extrémaux des parties ou sections du système contenant un conflit, l'un plus rapide et l'autre plus lent. Moyennant l'utilisation de règles d'affectation des ressources partagées et de politiques de routage appropriées, nous verrons qu'il est possible de modéliser formellement ces sections, à une approximation près. Ceci permet l'encadrement du comportement entrée-sortie d'un système global comportant plusieurs sous-systèmes en conflit, contenant tous les comportements possibles du système étudié (en termes de nombre de palettes évoluant dans le système, de délais et de cadences) quand la politique de gestion des conflits est périodique. On peut donc proposer, grâce à cette technique, un modèle approché de ces systèmes complexes sur un dioïde d'intervalles et avoir le bénéfice d'utiliser les contributions théoriques des structures algébriques de dioïde, en vue, entre autres, d'aborder des problèmes comme la synthèse de lois de commande.

Cette thèse est structurée en quatre chapitres et deux annexes comme suit :

- Dans un premier chapitre, nous ferons les rappels nécessaires qui concernent les propriétés des demi-anneaux idempotents, ou dioïdes. Il s'agira donc tout d'abord de présenter la théorie des treillis, aboutissant à la notion de structure ordonnée, sur laquelle sont basés les dioïdes. Nous mentionnons également les méthodes pour résoudre des équations à valeurs dans un dioïde, qui nous permettront d'obtenir des modèles de systèmes sous forme canonique. La dernière partie de ce chapitre est dédiée aux différentes extensions possibles à un dioïde dit « de scalaires », à savoir le dioïde de séries formelles et le dioïde d'intervalles. Tous ces résultats théoriques fourniront des outils importants pour le reste de cette thèse.
- L'objectif du chapitre 2 est de présenter la modélisation graphique et analytique de systèmes à événements discrets et, plus précisément, de systèmes de production. La dynamique de ces systèmes est capturée par le décompte ou la datation d'événements ayant lieu dans le système. Sous forme de réseau de Petri, cette considération consiste en des applications compteur ou dateur liées aux différentes transitions de ce graphe et qui permettront de définir les états du système modélisé. Nous insistons particulièrement sur le formalisme des graphes d'événements temporisés, qui est le seul à fournir un cadre déterministe pour une représentation analytique linéaire d'un système dans un dioïde. Les graphes d'événements temporisés avec

incertitudes temporelles sont des cas particuliers intéressants où les temporisations sont encadrées dans des intervalles, ce qui permet d'intégrer la notion d'incertitude de comportement, notamment à cause d'un conflit structurel. Une contribution apportée par cette thèse est la formalisation de la sémantique de ce cas particulier de réseaux de Petri. Nous verrons aussi, à la fin de ce chapitre d'état de l'art, par quels moyens peuvent être composés des systèmes, afin d'en former un plus complexe.

- Le chapitre 3 a pour but l'élaboration d'un modèle analytique pour des systèmes présentant un routage périodique. Nous contournerons ce problème en proposant un encadrement du comportement de tels systèmes. Ceci consiste donc en un modèle approché, par l'utilisation d'un dioïde d'intervalles. La borne inférieure de ces intervalles, qui est indépendante des politiques de routages utilisées, sera caractérisée, à l'aide d'un opérateur peu habituel : le produit de Hadamard. Contrairement au produit (de Cauchy) dont est muni un dioïde et qui consiste en une convolution de fonctions, le produit de Hadamard effectue le produit terme à terme de ces fonctions. Par la suite, l'étude de l'influence des politiques de routage utilisées nous permettra de caractériser un majorant du comportement de ces systèmes. Nous verrons subséquemment qu'il est possible dans certains cas de définir un routage optimal, permettant de réduire au maximum la taille de l'intervalle de modélisation, et par la même occasion de garantir la cadence du système de production global. Pour finir, cette contribution sera éprouvée sur un cas d'application.
- La quatrième chapitre proposera quant à lui un modèle analytique pour les systèmes présentant des partages de ressources. Nous présenterons une politique d'affectation « pseudo-périodique » des ressources, car elle est un compromis entre une affectation périodique des ressources aux processus concurrents et une gestion de type « premier produit arrivé, premier servi » (quelle que soit sa gamme). Pour cette politique bien précise, nous montrerons qu'un problème de ressource partagée entre deux sous-systèmes parallèles peut être transformé en un problème comportant des délais incertains et des GET désynchronisés, au prix d'incertitudes temporelles quant à l'accès à la ressource et sur sa durée d'indisponibilité. Nous aborderons 3 cas d'étude, de complexité croissante : tout d'abord, le cas du partage d'une ressource unique entre deux postes de travail, puis le cas du partage de plusieurs ressources et enfin le cas de sous-systèmes complexes entiers partageant un certain nombre de ressources. Ce dernier cas, plus complexe, nécessite de faire un rappel concernant le théorème du « second ordre », permettant de réaliser des opérations entre fonctions, et non entre scalaires. Pour finir, nous étudierons deux cas d'application de notre approche. Le premier consistera en une convergence de convoyeurs où les palettes ne doivent pas se chevaucher, et le second en des bassins regroupés en ateliers et réalisant des traitements chimiques par immersion des produits.
- Une première annexe aura pour intérêt de présenter certains aspects de la théorie des systèmes linéaires qui ne méritaient pas d'être présentés de manière détaillée dans le chapitre 2. Nous exposerons en premier lieu les hypothèses sur lesquelles nous sommes basées pour formuler une modélisation des systèmes que nous étudions. Par la suite, nous consacrons une section à l'application de la théorie des signaux aux structures

algébriques de dioïdes. Pour finir, nous verrons que l'analyse spectrale de matrices à coefficients dans un dioïde permet, entre autres, de déterminer la cadence de production des systèmes représentés par ces matrices.

- Une seconde annexe présentera certains aspects bibliographiques ayant retenu notre attention. Nous présenterons en particulier par quelle suite de contributions théoriques nous en sommes arrivés à la théorie actuelle des dioïdes. Un état de l'art sur les différents algorithmes permettant de calculer la valeur propre d'une matrice à coefficients dans un dioïde a aussi été intégré à cette annexe.

Une conclusion, située entre ces chapitres et ces annexes, nous permettra de revenir sur le travail réalisé et d'ouvrir la voie sur de nouvelles perspectives de recherche.

Chapitre 1

Préliminaires algébriques

Les systèmes linéaires sont connus pour leur relative simplicité, par opposition aux systèmes dits non linéaires. Les résolutions de problèmes linéaires sont généralement plus simples et plus rapides, car bénéficiant des outils de l'algèbre linéaire. Les systèmes dynamiques à événements discrets que nous étudions présentent des synchronisations, qui sont par nature des opérations non linéaires, au moins au sens des représentations habituelles. Cependant, en utilisant une autre structure algébrique, les dioïdes, ces systèmes acquièrent une représentation linéaire. Nous présentons dans ce chapitre les fondements théoriques liés aux dioïdes. L'application de cette théorie aux systèmes non linéaires que nous étudions fera l'objet du deuxième chapitre de cette thèse.

Les dioïdes sont des structures algébriques différentes des corps ; ils possèdent des propriétés algébriques plus faibles, en particulier les opérations ne sont pas inversibles, mais ils offrent néanmoins un pouvoir de modélisation susceptible d'être très utile. Ce premier chapitre a pour but de proposer au lecteur néophyte tous les éléments nécessaires à la bonne compréhension des approches et contributions de la théorie des dioïdes, que nous utilisons dans les chapitres suivants. Il ne s'agit pas cependant d'un rappel exhaustif sur cette théorie. Pour cela, nous proposons la lecture d'ouvrages tels que [GM79, BCOQ92, MS92], et des références qui y sont citées.

La première section de ce chapitre passe en revue les différentes théories sur lesquelles nous reposons dans le cadre de cette thèse. Les dioïdes, qui sont par définition des demi-anneaux idempotents, ont la particularité d'être ordonnés et peuvent de ce fait être vus comme des treillis. C'est pourquoi nous effectuons en premier lieu un rappel sur les ensembles ordonnés et la théorie des treillis, dont un ouvrage introductif de référence est [Bir40]. Puis nous indiquons dans quelle mesure les propriétés des treillis s'appliquent aux dioïdes. Il est à noter que certains dioïdes ont la particularité de pouvoir représenter les mêmes classes de systèmes, mais d'une manière différente.

La section suivante présente les techniques propres aux dioïdes permettant de résoudre des équations et caractériser les systèmes que nous étudions. Les équations que nous cherchons à résoudre sont de deux types. Le premier concerne les équations au point fixe, dont les solutions sont basées sur la notion de séries infinies, reposant sur l'utilisation de l'étoile de Kleene [Kle56], très étudiée dans la théorie des langages réguliers. Le deuxième type permet de savoir pour quelles valeurs en entrée un système possède une sortie donnée (ce qui servira pour la

maîtrise des systèmes, afin de les amener à poursuivre une trajectoire désirée). Ce type d'équations est classiquement résolu en utilisant des inverses, or cette approche n'est pas permise dans un dioïde, où les éléments ne possèdent à priori pas d'inverse. Nous aborderons donc la théorie de la résiduation, définie pour des applications croissantes (ou isotones) et qui permet de trouver les plus grandes sous-solutions ou les plus petites sur-solutions à ce type d'équations [BJ72].

Enfin, nous décrivons dans la section 1.3 deux manières plus élaborées de considérer les systèmes dans un dioïde. La première correspond à la notion de transformée, que l'on retrouve typiquement en automatique classique. Elle permet entre autre de changer le domaine de variation des inconnues, afin d'obtenir des systèmes plus facilement abordables [Gau92]. La deuxième concerne l'application de l'analyse par intervalles aux structures algébriques de dioïdes. L'analyse par intervalles a été développée par des mathématiciens depuis les années 50 et 60 (voir par exemple [Moo66]) comme une approche pour encadrer les erreurs dans les calculateurs mathématiques, dans le but d'obtenir des résultats fiables. Notre intérêt pour cette approche réside dans le fait qu'elle permet la manipulation d'approximations dans les dioïdes, afin de modéliser des incertitudes liées au caractère complexe des systèmes que l'on étudie [LS01, LHCJ04].

1.1 Outils algébriques

Nous présentons dans cette section les liens qui existent entre les treillis et les dioïdes, suite à un rappel concernant chacune de ces deux structures.

1.1.1 Structures ordonnées et treillis

Cette partie présente les points essentiels concernant les structures ordonnées, dont les treillis sont un cas particulier très important. Pour de plus amples informations au sujet de la théorie des treillis, nous recommandons la lecture de [Bir40], ouvrage toujours de référence. D'autres rappels à propos de cette théorie sont également proposés dans [BJ72] et [BCOQ92].

Structures ordonnées

Prenons deux exemples. On peut définir sur l'ensemble des entiers naturels les deux relations binaires suivantes :

$a \leq b$: la relation d'ordre habituelle.

$a \text{ div } b$: a divise b (ou b est un multiple de a).

Ces deux relations possèdent des propriétés communes. Elles sont à la fois :

- Réflexives : $\forall a \in \mathbb{N}, a \leq a$ et $a \text{ div } a$.
- Antisymétriques :

$$\begin{aligned} a \leq b \text{ et } b \leq a &\Rightarrow a = b \\ a \text{ div } b \text{ et } b \text{ div } a &\Rightarrow a = b \end{aligned}, \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

- Transitives :

$$\begin{aligned} a \leq b \text{ et } b \leq c &\Rightarrow a \leq c \\ a \text{ div } b \text{ et } b \text{ div } c &\Rightarrow a \text{ div } c \end{aligned}, \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

On dit alors que ce sont des relations d'ordre.

Définition 1 (Ensemble ordonné). *Un ensemble ordonné est un ensemble \mathcal{E} muni d'une relation d'ordre. On notera cette relation \preceq , et un ensemble ordonné sera noté (\mathcal{E}, \preceq) .*

Définition 2 (Ordre total). *Un ensemble \mathcal{E} est dit totalement ordonné si deux éléments quelconques de cet ensemble sont toujours comparables. C'est-à-dire si $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{E}$, on a $e_1 \preceq e_2$ ou $e_2 \preceq e_1$.*

Notation 1 (Ordre strict). *Une relation d'ordre strict sera notée \prec . Ainsi, si $e_1 \prec e_2$ alors $e_1 \preceq e_2$ et $e_1 \neq e_2$.*

Notation 2. *Pour ôter toute ambiguïté, on pourra préciser que la relation \preceq porte sur les éléments de \mathcal{E} par la notation $\preceq_{\mathcal{E}}$.*

Définition 3 (Ordre restreint). *Tout sous-ensemble \mathcal{S} d'un ensemble ordonné (\mathcal{E}, \preceq) peut également être ordonné par la restriction de l'ordre de \mathcal{E} aux éléments de \mathcal{S} , notée $\preceq_{\mathcal{S}}$. Cet ordre restreint est simplement défini par :*

$$\forall s_1, s_2 \in \mathcal{S} \subset \mathcal{E}, s_1 \preceq_{\mathcal{S}} s_2 \iff s_1 \preceq s_2.$$

Un ensemble ordonné fini (\mathcal{E}, \preceq) peut être représenté par un graphe appelé diagramme de Hasse, d'après le nom du mathématicien Allemand du 20^e siècle Helmut Hasse, réputé pour ses nombreuses contributions à la théorie des treillis. Cette représentation est utilisée pour faciliter la compréhension des relations entre les éléments de cet ensemble ordonné. Chaque élément de \mathcal{E} est représenté par un sommet et deux sommets sont reliés par un arc si les éléments représentés par ces sommets sont comparables. Par convention, l'ordre est croissant du bas vers le haut du diagramme, il n'y a donc pas besoin d'orienter les arcs avec des flèches. Par ailleurs, pour ne pas surcharger le diagramme, on ne représente pas toute la relation d'ordre, mais seulement sa réduction réflexive transitive (on omet donc les boucles et les relations entre deux éléments donnés si un troisième élément se situe « entre eux »).

La figure 1.1 décrit le cas d'un ensemble ordonné $(\{a, b, c, d\}, \preceq)$ avec a et b incomparables et les relations $a \preceq c, b \preceq c$ et $c \preceq d$. L'ensemble $\{a, b, c, d\}$ est partiellement ordonné (car a et b sont incomparables). Par ailleurs, $a \preceq d$ et $b \preceq d$, par transitivité de l'ordre \preceq . Pour finir, le sous-ensemble $\{a, c\}$ est un ensemble ordonné par la restriction de \preceq à ce sous-ensemble.

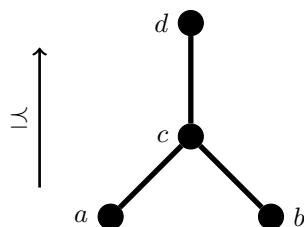


FIG. 1.1 – Diagramme de Hasse de l'ensemble ordonné $(\{a, b, c, d\}, \preceq)$

Exemple 1.

- (\mathbb{N}, \leq) , (\mathbb{Z}, \leq) , (\mathbb{Q}, \leq) et (\mathbb{R}, \leq) , où \leq est l'ordre naturel, sont totalement ordonnés.
- Soit (\mathcal{E}, \preceq) un ensemble ordonné. L'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ de \mathcal{E}^2 est ordonné par la relation suivante, pour tous $\alpha, \beta, a, b \in \mathcal{E}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff (\alpha \preceq a \text{ et } \beta \preceq b).$$

Même si \preceq est total sur \mathcal{E} , l'ordre qu'il induit sur \mathcal{E}^2 n'est que partiel.

Définition 4 (Minorant, majorant). Soit un ensemble ordonné (\mathcal{E}, \preceq) et \mathcal{S} un sous-ensemble non vide de \mathcal{E} . On appelle minorant de \mathcal{S} tout élément e de \mathcal{E} tel que $\forall s \in \mathcal{S}, e \preceq s$. De même, un élément e' de \mathcal{E} est appelé majorant de \mathcal{S} si et seulement si $\forall s \in \mathcal{S}, s \preceq e'$.

Définition 5 (Bornes d'un ensemble). Un sous-ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ est dit borné s'il admet à la fois un majorant et un minorant. Lorsque l'ensemble des majorants de \mathcal{S} a un plus petit élément, il est appelé borne supérieure de \mathcal{S} et il est noté $\sup(\mathcal{S})$ ou $\bigvee \mathcal{S}$. De même lorsque l'ensemble des minorants de \mathcal{S} a un plus grand élément, ce dernier est appelé borne inférieure de \mathcal{S} et il est noté $\inf(\mathcal{S})$ ou $\bigwedge \mathcal{S}$. Lorsque ces bornes sont définies, tout majorant de \mathcal{S} est plus grand que ou égal à $\sup(\mathcal{S})$ et tout minorant de \mathcal{S} est plus petit que ou égal à $\inf(\mathcal{S})$.

Exemple 2. Soit l'ensemble $\mathcal{E} = \{a, c, d, e, f, h, i, j\}$ partiellement ordonné pour l'ordre \preceq décrit par le diagramme de la figure 1.2. Soit le sous-ensemble $\mathcal{S} = \{d, e, f, h\}$. L'ensemble des majorants $\mathcal{E}_{\text{maj}} = \{a, d\}$ et l'ensemble des minorants $\mathcal{E}_{\text{min}} = \{h, i, j\}$ de \mathcal{S} sont représentés. Remarquons que $\sup(\mathcal{S}) = d$ et $\inf(\mathcal{S}) = h$. On constate qu'un minorant (ou un majorant) de \mathcal{S} n'appartient pas forcément à \mathcal{S} .

Demi-treillis et treillis

Définition 6 (Inf- et sup-demi-treillis). Un sup-demi-treillis est un ensemble ordonné dans lequel tout couple d'éléments (e_1, e_2) admet une borne supérieure (le plus petit majorant) notée $\sup(e_1, e_2)$ ou $e_1 \vee e_2$. De même, un inf-demi-treillis est un ensemble ordonné dans lequel tout couple d'éléments (e_1, e_2) admet une borne inférieure (le plus grand minorant) notée $\inf(e_1, e_2)$ ou $e_1 \wedge e_2$.

Remarque 1 (Principe de dualité). Notons \succeq l'inverse de la relation d'ordre \preceq . Si (\mathcal{E}, \preceq) est un sup-demi-treillis, alors (\mathcal{E}, \succeq) est un inf-demi-treillis et vice-versa. Par conséquent, une relation impliquant \preceq , \vee et \wedge reste vraie en remplaçant \preceq par \succeq et en permutant \vee et \wedge . Il s'agit du principe de dualité.

Définition 7 (Treillis). Un treillis est un ensemble ordonné qui est à la fois un sup-demi-treillis et un inf-demi-treillis. Autrement dit, un treillis est un ensemble ordonné dans lequel tout couple d'éléments admet à la fois un plus petit majorant et un plus grand minorant.

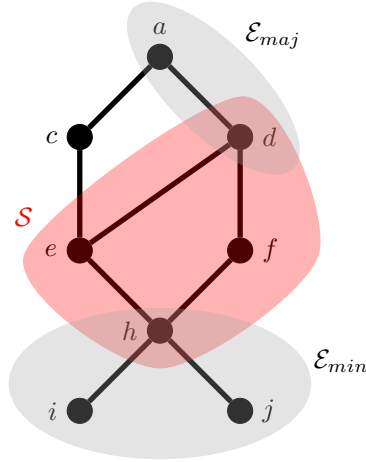


FIG. 1.2 – Représentation de l'ensemble des majorants et minorants du sous-ensemble $S \subset \mathcal{E}$

Exemple 3. $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{div})$, où \setminus est la soustraction ensembliste et $a \text{ div } b$ équivaut à la relation « a divise b » déjà présentée, est un treillis. Les lois de treillis de cet ensemble ordonné sont $a \vee b$ et $a \wedge b$, respectivement le plus petit multiple commun et le plus grand diviseur commun de a et de b .

Définition 8 (Complétude). Un sup-demi-treillis (respectivement un inf-demi-treillis) \mathcal{T} est dit sup-complet (resp. inf-complet) si tout sous-ensemble, fini ou infini, de \mathcal{T} admet un plus petit majorant (resp. un plus grand minorant) dans \mathcal{T} . Un treillis est dit complet s'il est à la fois inf-complet et sup-complet.

Remarque 2. Pour un sup-demi-treillis sup-complet noté (\mathcal{T}, \vee) , la borne supérieure de tout sous-ensemble de \mathcal{T} est définie, y compris pour \mathcal{T} . Un sup-demi-treillis sup-complet (\mathcal{T}, \vee) a donc nécessairement un plus grand élément noté $\top_{\mathcal{T}} = \bigvee_{t \in \mathcal{T}} t$. Pour la même raison, un inf-demi-treillis inf-complet (\mathcal{T}, \wedge) a toujours un plus petit élément noté $\varepsilon_{\mathcal{T}} = \bigwedge_{t \in \mathcal{T}} t$.

Exemple 4.

- En ajoutant l'élément $+\infty$ à \mathbb{Z} , l'ensemble $(\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \leq)$ est totalement ordonné sup-complet.
- En revanche, $(\mathbb{Q} \cup \{+\infty\}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné qui n'est ni sup-complet, ni inf-complet. Par exemple, le sous-ensemble $\{q \in \mathbb{Q} \mid x \leq \sqrt{2}\}$ de \mathbb{Q} n'a pas de plus petit majorant dans \mathbb{Q} .

Théorème 1. Un sup-demi-treillis complet (\mathcal{T}, \leq) est un treillis complet si, et seulement si, il a un plus petit élément $\varepsilon_{\mathcal{T}}$.

Démonstration :

(\Rightarrow) Si \mathcal{T} est un treillis complet alors il admet un plus petit élément $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ (cf. définition 8 et remarque 2).

(\Leftarrow) Supposons que (\mathcal{T}, \preceq) est un sup-demi-treillis complet et possède un plus petit élément $\varepsilon_{\mathcal{T}}$. Soient A et B deux ensembles d'indices (c'est-à-dire des sous-ensembles finis de \mathbb{N}) et $\mathcal{S} = \{s_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ un sous-ensemble non vide de \mathcal{T} et $\mathcal{M} = \{m_{\beta}\}_{\beta \in B}$ l'ensemble des minorants de \mathcal{S} . L'ensemble \mathcal{M} est non vide puisque $\varepsilon_{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}$. Posons $m = \bigvee_{\beta \in B} m_{\beta}$; l'élément m est défini dans \mathcal{T} puisque \mathcal{T} est complet.

Par définition de l'ensemble \mathcal{M} ,

$$\forall s_{\alpha} \in \mathcal{S}, \forall m_{\beta} \in \mathcal{M}, m_{\beta} \preceq s_{\alpha},$$

ou encore

$$\forall s_{\alpha} \in \mathcal{S}, m \preceq s_{\alpha}.$$

Donc m est minorant de \mathcal{S} et par conséquent, le plus grand des minorants de \mathcal{S} . Tout sous-ensemble non vide de \mathcal{T} admettant un plus grand minorant, \mathcal{T} est donc un inf-demi-treillis complet et également un treillis complet. □

Remarque 3. *En conséquence du principe de dualité présenté dans la remarque 1, on peut énoncer le théorème suivant : un inf-demi-treillis complet est un treillis complet si, et seulement si, il a un plus grand élément $\top_{\mathcal{T}}$.*

1.1.2 Éléments de la théorie des dioïdes

Le concept de dioïde, ou demi-anneau idempotent, a été formalisé dans les années 70 et a depuis suscité des études et des applications de plus en plus poussées¹. Ces structures algébriques présentent la particularité de permettre la représentation linéaire de phénomènes de rendez-vous. Les systèmes que nous étudions présentant de nombreuses synchronisations, nous avons choisi d'utiliser ce formalisme. Dans cette section, nous allons présenter les éléments de la théorie des dioïdes dont nous nous servirons dans la suite de cette thèse. Pour des présentations plus détaillées sur cette théorie, nous recommandons la lecture d'ouvrages de référence tels que [CG79], [BCOQ92], [MS92], [Gun98] ou [GM02].

Définition 9 (Monoïde). *Un monoïde $(\mathcal{M}, *)$ est une structure algébrique basée sur un ensemble d'éléments \mathcal{M} et munie d'une loi de composition interne $*$ portant sur ses éléments, telle que :*

- \mathcal{M} est fermé par rapport à $*$: $[a, b \in \mathcal{M} \text{ et } a * b = c] \Rightarrow c \in \mathcal{M}$.
- La loi $*$ est associative : $\forall a, b, c \in \mathcal{M}, (a * b) * c = a * (b * c)$.
- \mathcal{M} possède un élément neutre : $\exists \varepsilon$ tel que $\forall a \in \mathcal{M}, \varepsilon * a = a * \varepsilon = a$.

On fera parfois abusivement référence à un monoïde par son seul ensemble de valeurs.

Définition 10 (Monoïde commutatif). *Un monoïde commutatif $(\mathcal{M}, *)$ est un monoïde tel que la loi $*$ est commutative. En somme, $\forall a, b \in \mathcal{M}, a * b = b * a$.*

Définition 11 (Monoïde idempotent). *Un monoïde commutatif $(\mathcal{M}, *)$ est dit idempotent si la loi $*$ est idempotente, c'est-à-dire si elle vérifie :*

$$\forall a \in \mathcal{M}, a * a = a.$$

1. voir l'historique des dioïdes proposé dans l'annexe B.1

Définition 12 (Demi-anneau). *Un demi-anneau $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$ est une structure algébrique basée sur un ensemble \mathcal{S} muni de deux lois de composition internes notées \oplus (la somme) et \otimes (le produit)² telles que :*

- (\mathcal{S}, \oplus) est un monoïde commutatif dont l'élément neutre est ε .
- (\mathcal{S}, \otimes) est un monoïde ayant pour élément neutre e .
- ε est absorbant pour le produit, c'est-à-dire :

$$\forall a \in \mathcal{D}, \varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon.$$

- Le produit est distributif sur la somme à gauche et à droite :

$$\forall a, b, c \in \mathcal{D}, a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \text{ et } (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c).$$

Définition 13 (Dioïde). *Un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est un demi-anneau pour lequel le monoïde (\mathcal{D}, \oplus) est également idempotent. On se permettra donc d'utiliser aussi l'appellation « demi-anneau idempotent », pour parler d'une structure algébrique de type dioïde.*

Remarque 4. À l'instar des simplifications d'écritures habituelles, le symbole \otimes pourra être omis quand aucune confusion ne sera possible avec la multiplication traditionnelle. Par ailleurs, la référence à un dioïde pourra elle aussi être restreinte à son seul ensemble de valeurs pour plus de lisibilité.

Définition 14 (Sous-dioïde). *Soit $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ un dioïde et $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. $(\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$ est dit sous-dioïde de \mathcal{D} si $\varepsilon, e \in \mathcal{C}$ et si \mathcal{C} est fermé pour les lois \oplus et \otimes .*

Exemple 5. $(\mathbb{Z}, \max, +)$ est un sous-dioïde de $(\mathbb{R}, \max, +)$.

Définition 15 (Commutativité). *Un dioïde \mathcal{D} est dit commutatif si son produit est commutatif aussi, pour tous les éléments de \mathcal{D} .*

Même si nous ne traitons pas concrètement les structures algébriques d'anneaux, nous y feront quelques références le long de cette thèse. C'est pourquoi nous présentons aussi la définition suivante.

Définition 16 (Anneau). *On appelle groupe commutatif un monoïde $(\mathcal{M}, *)$ dans lequel tout élément a un inverse et tel que la loi $*$ est commutative.*

Un anneau $(\mathcal{A}, \oplus, \otimes)$ est un demi-anneau pour lequel le monoïde (\mathcal{A}, \oplus) est un groupe commutatif.

Des dioïdes peuvent aussi être formés à partir d'ensembles d'éléments plus complexes que les ensembles de scalaires. Il est en particulier possible de traiter des cas matriciels.

Exemple 6 (Dioïde matriciel). *Si $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est un dioïde, alors l'ensemble $\mathcal{D}^{n \times n}$ des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans \mathcal{D} permet aussi de former un dioïde, dont la somme \oplus' et le produit \otimes' sont définis par :*

$$\begin{cases} (A \oplus' B)_{ij} \triangleq A_{ij} \oplus B_{ij} \\ (A \otimes' B)_{ij} \triangleq \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}, \forall i, j \in [1, n], \forall A, B \in \mathcal{D}^{n \times n}. \end{cases}$$

L'élément neutre de la loi \oplus' est la matrice composée exclusivement de ε , et est également notée ε . L'élément neutre de la loi \otimes' est la matrice identité, composée de e sur la diagonale principale et de ε partout ailleurs.

2. les termes addition et multiplication seront réservés aux opérations classiques définies par exemple sur le corps des réels

1.1.3 Liens entre dioïdes et treillis

Cette section a pour but de montrer quels liens existent entre les structures algébriques de dioïdes et de treillis. Ainsi, les résultats concernant les treillis s'appliquent aussi aux dioïdes. Ceci nous permettra de mettre en pratique dans la section 1.2.3 la théorie de la résiduation sur des applications définies sur des dioïdes (considérés à juste titre comme des ensembles ordonnés). Les ouvrages de référence pour cette partie sont [CG79] et [BCOQ92].

L'idempotence de la somme d'un dioïde confère naturellement à celui-ci une relation d'ordre. Le théorème suivant affirme que cette relation d'ordre est compatible avec les lois du dioïde.

Théorème 2 (Relation d'ordre dans un dioïde). *Dans un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, la loi idempotente \oplus induit naturellement une relation d'ordre (partiel) \preceq , grâce à l'équivalence $\forall a, b \in \mathcal{D}, a \preceq b \iff a \oplus b = b$. Comme il est d'usage dans le corps des réels, on pourra aussi utiliser une relation inverse, notée \succ , et décrite par l'équivalence $b \succ a \iff a \preceq b$.*

Démonstration : Afin de montrer qu'une relation est un ordre, il faut prouver qu'elle est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

La somme d'un dioïde est idempotente, on a donc $a = a \oplus a$, d'où $a \preceq a$, ce qui montre la réflexivité. La somme étant aussi commutative, si $a \preceq b$ et $b \preceq a$ alors $b = b \oplus a = a \oplus b = a$, d'où $a = b$, ce qui prouve l'antisymétrie. Il reste à montrer la transitivité. Si $a \preceq b$ et $b \preceq c$, alors $c = b \oplus c = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a \oplus c$, soit $a \preceq c$. On en conclut que \preceq est une relation d'ordre. \square

Théorème 3. *Les lois \oplus et \otimes du dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ sont cohérentes avec la relation \preceq .*

Démonstration : Soient $a, b, c \in \mathcal{D}$ avec $a \preceq b$. On a $b \oplus c = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus b \oplus c = a \oplus b \oplus (c \oplus c) = a \oplus c \oplus b \oplus c = (a \oplus c) \oplus (b \oplus c)$, d'où $a \oplus c \preceq b \oplus c$ d'après la relation d'ordre définie sur \mathcal{D} .

Par ailleurs, $b \otimes c = (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$, d'où $a \otimes c \preceq b \otimes c$ (idem pour la multiplication à gauche). \square

D'après la définition 2, on constate que la relation d'ordre d'un dioïde \mathcal{D} est totale si et seulement si $\forall a, b \in \mathcal{D}, a \oplus b = a$ ou b . Cette propriété est dite de sélectivité [GM02, section 6.4].

Le théorème 2 établit que l'idempotence de la somme dans un dioïde induit une structure de sup-demi-treillis, pour lequel la borne supérieure, notée \vee , coïncide avec la loi \oplus du dioïde³. Les définitions de demi-treillis et de treillis de la section 1.1.1 ont été introduites en faisant uniquement intervenir les propriétés de la relation d'ordre \preceq définie sur un ensemble. Cependant, il est intéressant de faire le lien entre ce point de vue ensembliste et le point de vue algébrique. En algèbre, un treillis est parfois défini comme un ensemble muni de deux opérations binaires \vee et \wedge jouissant des propriétés classiques d'associativité, de commutativité et d'idempotence, et de la propriété dite d'absorption ($x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$). Dans ce cas, la notion d'ordre $x \preceq y$ peut être exprimée via les équations $x = x \wedge y \iff x \vee y = y$. C'est cette considération

3. $a \oplus b$ est bien le plus petit majorant de a et b

qui justifie notre intérêt pour les treillis : ils permettent de traiter les questions relatives à l'ordre par des moyens algébriques (des opérations et des équations).

Définition 17 (Complétude). *Un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est dit complet s'il est fermé pour les séries infinies et si le produit est distributif (à gauche et à droite) sur les séries infinies, c'est-à-dire si :*

$$\forall a \in \mathcal{D} \text{ et } \forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}, a \otimes \left(\bigoplus_{x \in \mathcal{A}} x \right) = \bigoplus_{x \in \mathcal{A}} a \otimes x \text{ et } \left(\bigoplus_{x \in \mathcal{A}} x \right) \otimes a = \bigoplus_{x \in \mathcal{A}} x \otimes a.$$

Remarque 5. *Il n'existe pas d'éléments négatifs dans un dioïde⁴ car $a \oplus \varepsilon = a$, c'est-à-dire $\forall a \in \mathcal{D}, a \succ \varepsilon$. En conséquence aucun élément opposé existe, sauf ε qui est par définition son propre opposé.*

Même si la loi \oplus d'un dioïde ne permet pas de définir d'opposé, nous pourrions cependant manipuler, par rapport à la loi \otimes , des « pseudo-inverses » grâce à la théorie de la résiduation que nous aborderons dans la section 1.2.3.

Définition 18 (Plus grand élément). *Dans un dioïde complet, on définit le plus grand élément, noté \top en référence aux notations des treillis, comme la borne supérieure de ce dioïde. Ainsi \top vérifie $\forall b \in \mathcal{D}, \top \oplus b = \top$, soit par extension $\top = \bigoplus_{a \in \mathcal{D}} a$. Par ailleurs, afin de respecter l'absorption de ε pour le produit, $\top \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \top = \varepsilon$.*

Exemple 7 (Dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$). *La structure algébrique $(\mathbb{Z}, \max, +)$ est notée \mathbb{Z}_{\max} . Pour en faire un dioïde complet, il faut rajouter à son ensemble de valeurs le plus grand élément $\top = +\infty$ ainsi que l'élément neutre pour la somme $\varepsilon = -\infty$. En notant $\overline{\mathbb{Z}}$ l'ensemble $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on peut affirmer que le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ est complet. Par ailleurs, dans ce dioïde $e = 0$.*

De même, la structure algébrique $(\mathbb{Z}, \min, +)$ à laquelle on rajoute le plus grand élément $\top = -\infty$ et l'élément neutre $\varepsilon = +\infty$ est un dioïde complet. On le note $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$, et pour ce dioïde aussi $e = 0$.

Remarque 6. *L'ordre $\preceq_{\overline{\mathbb{Z}}_{\max}}$ défini dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ est total et coïncide avec l'ordre usuel \leq . En revanche, l'ordre total $\preceq_{\overline{\mathbb{Z}}_{\min}}$ défini dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ est l'inverse de l'ordre usuel, c'est-à-dire $a \preceq_{\overline{\mathbb{Z}}_{\min}} b \iff a \oplus_{\overline{\mathbb{Z}}_{\min}} b = b \iff \min(a, b) = b \iff a \geq b$.*

Par ailleurs, l'ordre canonique d'un dioïde matriciel est partiel.

Définition 19 (Borne inférieure). *On peut définir dans un dioïde complet $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ la notion de borne inférieure, notée \wedge . Cette loi est associative, commutative et idempotente et vérifie :*

$$a \wedge b = \bigoplus \{x \mid x \preceq a \text{ et } x \preceq b\}.$$

Cette loi fait de $(\mathcal{D}, \oplus, \wedge)$ un treillis complet. Elle vérifie en conséquence :

$$b = a \oplus b \iff a \preceq b \iff a = a \wedge b. \quad (1.1)$$

Remarque 7 (Distributivité par rapport à la borne inférieure). *On constate dès lors que tout dioïde complet \mathcal{D} peut à juste titre être considéré comme un*

4. au sens de la loi \oplus

treillis⁵. Par ailleurs, la relation (1.1) peut faire penser que les opérateurs \oplus et \wedge jouent un rôle dual dans un dioïde. En prenant uniquement en considération les structures de treillis d'un dioïde et le principe de dualité (de la remarque 1), on pourrait penser que cela est vrai. Mais cette assertion devient fausse dès lors que l'on considère la loi \otimes du dioïde. En effet, cette opération croissante (à gauche comme à droite) ne vérifie qu'une relation de sous-distributivité par rapport à \wedge [GM02, section 2.3.1.3] :

$$\begin{cases} c \otimes (a \wedge b) \preceq (c \otimes a) \wedge (c \otimes b) \\ (a \wedge b) \otimes c \preceq (a \otimes c) \wedge (b \otimes c) \end{cases}, \forall a, b, c \in \mathcal{D}.$$

Remarque 8. La définition du dioïde que nous venons de présenter fait référence à celle donnée par Baccelli et al., en particulier dans leur ouvrage de référence [BCOQ92]. Mais elle ne fait pas toujours l'unanimité. Gondran et Minoux, quant à eux, n'imposent pas le fait qu'un dioïde soit idempotent. En basant leurs démonstrations sur des demi-anneaux un peu plus généraux, c'est-à-dire en imposant seulement le fait qu'un dioïde soit ordonné⁶, ils parviennent aux mêmes résultats [GM79, GM02].

1.2 Résolution d'équations dans un dioïde

Dans la suite de cette thèse, nous serons amenés à résoudre principalement trois types d'équations définies dans les dioïdes.

Le premier type, appelé « équations au point fixe », a pour forme $f(x) = x$ où $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$. Les équations de type point fixe formulées dans des dioïdes ont été étudiées de façon générale dans [BCOQ92, section 4.5]. Elles sont d'importance car, conformément à l'approche présentée dans la section 2.2.1, on cherchera systématiquement à représenter les systèmes étudiés sous des formes récurrentes explicites de type point fixe. Il a notamment été mis en évidence que sous certaines hypothèses de continuité de l'application f , les ensembles de solutions de ces équations sont ordonnés ; nous nous intéresserons plus particulièrement à leurs solutions minimales.

Dans une structure algébrique de dioïde, il n'est généralement pas possible d'inverser des applications (comme la somme et le produit ne sont pas nécessairement inversibles). La théorie de la résiduation présentée dans la section 1.2.3 permet cependant, sous certaines conditions, de déterminer les plus grandes « sous-solutions » ou « sur-solutions », appelées pseudo-inverses, d'une équation de type $f(x) = b$. Mais il peut ne pas exister de solution à cette équation (quand f est non surjective) et/ou une telle solution peut ne pas être unique (quand f est non injective). C'est pourquoi nous étudierons plus précisément deux types d'inéquations, relevant de la forme $f(x) \preceq b$ ou $f(x) \succeq b$ où $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, dont on cherchera respectivement la plus grande et la plus petite solution x . La théorie de la résiduation, présentée dans [Tar55] et [BJ72], concerne de façon générale les applications isotones définies sur des ensembles ordonnés. L'extension de cette théorie aux dioïdes découle de l'ordre canonique dont on peut les munir (comme présenté dans [BCOQ92]).

Avant d'énoncer des résultats particuliers, nous allons préciser les notions de continuité et de monotonie pour les applications définies sur des dioïdes.

5. voir aussi le raisonnement présenté dans [GM02, page 23]

6. ce qui est toujours le cas, quand la loi \oplus est idempotente

1.2.1 Continuité et monotonie d'applications

L'isotonie et l'antitonie sont des notions utilisées pour caractériser les applications respectivement croissantes et décroissantes, définies sur des ensembles ordonnés. Nous avons volontairement restreint certaines de ces définitions aux applications sur des diodes.

Définition 20 (Isotonie, antitonie). Soient $(\mathcal{D}, \preceq_{\mathcal{D}})$ et $(\mathcal{E}, \preceq_{\mathcal{E}})$ des ensembles ordonnés. Une application $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ est dite isotone si, $\forall a, b \in \mathcal{D}$:

$$a \preceq_{\mathcal{D}} b \Rightarrow f(a) \preceq_{\mathcal{E}} f(b).$$

Par ailleurs, une application $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ est dite antitone si, $\forall a, b \in \mathcal{D}$:

$$a \preceq_{\mathcal{D}} b \Rightarrow f(a) \succ_{\mathcal{E}} f(b).$$

Exemple 8 (Isotonie des lois de treillis). Soit $(\mathcal{T}, \vee, \wedge)$ un treillis dont l'ordre est noté \preceq . La loi \vee vérifie $\forall a, b, c \in \mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} a \preceq b &\iff b = a \vee b \Rightarrow c \vee b = c \vee a \vee c \vee b \\ &\Rightarrow c \vee a \preceq c \vee b. \end{aligned}$$

Il en est de même pour la loi \wedge . Les lois d'un treillis sont donc isotones pour l'ordre du treillis.

Remarque 9 (Composition d'applications isotones). L'isotonie est une propriété conservée par composition d'applications.

Définition 21 (Monotonie). Une application isotone ou antitone est dite monotone.

La notion de continuité caractérise les applications pour lesquelles les bornes supérieure et inférieure sont conservées [Bir40].

Définition 22 (Continuité [BCOQ92, Section 4.4.1]). Soient \mathcal{D} et \mathcal{C} deux diodes complets. Une application $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i. en abrégé), respectivement semi-continue supérieurement (s.c.s.), si pour tout sous-ensemble $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$,

$$f\left(\bigoplus_{x \in \mathcal{B}} x\right) = \bigoplus_{x \in \mathcal{B}} f(x),$$

respectivement,

$$f\left(\bigwedge_{x \in \mathcal{B}} x\right) = \bigwedge_{x \in \mathcal{B}} f(x).$$

Remarque 10. Notons qu'une application s.c.i. est isotone puisque $a \succ b \iff a = a \oplus b$ implique $f(a) = f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b)$. Or, par définition, $f(a) \oplus f(b) \succ f(b)$. En conséquence $f(a) \succ f(b)$. Il en est de même pour une application s.c.s.

1.2.2 L'étoile de Kleene et les équations au point fixe

Dans cette section, nous cherchons la plus petite solution aux équations au point fixe de la forme $f(x) = x$ où $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ est semi-continue inférieurement.

Notation 3 (L'étoile de Kleene [Kle56]). Soit \star l'opérateur défini sur un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ par $\forall a \in \mathcal{D}, a^\star \triangleq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} a^i$, avec $a^0 = e$.

Cet opérateur est cohérent avec la relation d'ordre \preceq par l'implication suivante : $\forall a, b \in \mathcal{D}$, si $a \preceq b$, alors $a^\star \preceq b^\star$.

De la même façon que pour un dioïde de scalaires, l'étoile d'une matrice carrée $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$, notée A^\star , est définie par $A^\star = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A^i$ avec par convention $A^0 = E_n$.

L'étoile de Kleene possède certaines propriétés dont les plus courantes ont été regroupées dans le tableau 1.1 [BC75, p. 165]. On pourra en trouver les preuves dans [Cot99, Lho03]. Ces propriétés sont valables $\forall a, b \in \mathcal{D}$.

$(a^\star)^\star = a^\star$	e.1
$a^\star a = a a^\star$	e.2
$a(ba)^\star = (ab)^\star a$	e.3
$(ab^\star)^\star = e \oplus a(a \oplus b)^\star$	e.4
$(a \oplus b)^\star = (a^\star b)^\star a^\star = a^\star (ba^\star)^\star = (a^\star b^\star)^\star$	e.5
$(a \oplus b)^\star = (a^\star \oplus b)^\star = (a \oplus b^\star)^\star = (a^\star \oplus b^\star)^\star$	e.6

TAB. 1.1 – Formules impliquant l'étoile de Kleene dans un dioïde

Remarque 11. Un certain nombre d'identités classiquement formulées en algèbre linéaire restent vraies dans une structure algébrique de dioïde, à un changement de notation près. Ainsi l'élément a^\star est parfois appelé « quasi-inverse de a » dans la littérature [GM02]. Il ne correspond non pas à l'inverse de a mais à ce qui serait noté dans la structure algébrique usuelle l'inverse de $1 - a$. Quand il est appelé quasi-inverse, a^\star est ainsi vu comme le développement formel, au sens de l'algèbre usuelle, de $(e - a)^{-1}$ si celui-ci est défini.

Théorème 4. Soient $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ un dioïde complet et $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ une application semi-continue inférieurement. On note

$$g^0 = \text{Id}, g^i = \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{i \text{ fois}} \text{ et } g^\star = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} g^i.$$

La plus petite solution de $g(x) \oplus b = x$ est $x = g^\star(b)$.

Démonstration :

– Vérifions tout d'abord que $g^\star(b)$ est solution de l'équation $g(x) \oplus b = x$:

$$\begin{aligned} g(g^\star(b)) \oplus b &= g\left(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} g^i(b)\right) \oplus b \\ &= \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} g(g^i(b)) \oplus b && \text{car } g \text{ et } \oplus \text{ sont s.c.i.} \\ &= \bigoplus_{i \geq 1} g^i(b) \oplus \text{Id}(b) = g^\star(b). \end{aligned}$$

– Ensuite, quel que soit x solution de $g(x) \oplus b = x$:

$$\begin{aligned} x &= g(x) \oplus b = g(g(x) \oplus b) \oplus b \\ &= g^2(x) \oplus g(b) \oplus b \\ &\vdots \\ &= g^n(x) \oplus g^{n-1}(b) \oplus \cdots \oplus g(b) \oplus b \quad \text{avec } n \geq 1 \\ &\succcurlyeq g^{n-1}(b) \oplus \cdots \oplus g(b) \oplus b. \end{aligned}$$

On en déduit que toute solution de $g(x) \oplus b = x$ est supérieure ou égale à $g^*(b)$. \square

Corollaire 1. *Dans un dioïde complet, l'équation $x = ax \oplus b$ admet $x = a^*b$ pour plus petite solution. De même, $x = ba^*$ est la plus petite solution de l'équation $x = xa \oplus b$.*

Les propriétés regroupées dans le tableau 1.1 sont vérifiées pour tout dioïde complet, y compris matriciel. Dans le cas matriciel, on a en particulier le résultat suivant permettant de calculer l'étoile d'une matrice carrée décomposée en 4 blocs.

Théorème 5. *Soit $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$ une matrice partitionnée en quatre blocs*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

La matrice A^ s'écrit alors :*

$$\begin{pmatrix} a_{11}^* \oplus a_{11}^* a_{12} (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* a_{21} a_{11}^* & a_{11}^* a_{21} (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* \\ (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* a_{21} a_{11}^* & (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* \end{pmatrix}.$$

Démonstration : On renvoie le lecteur à [BCOQ92, page 204] pour la démonstration de ce résultat. \square

Exemple 9. *Soient les matrices A et B suivantes, avec $A \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{2 \times 2}$ et $B \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{2 \times 1}$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

La matrice A peut par exemple décrire le graphe de la figure 1.3.

*On cherche à résoudre l'équation $X = AX \oplus B$, les calculs étant effectués dans la structure algébrique $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$. En se basant sur le théorème 4, on sait que la plus petite solution X' est égale à A^*B . Par calcul⁷, on trouve :*

$$X' = \begin{pmatrix} e \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On peut aisément vérifier que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e \\ 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ est égal à X' .

⁷. grâce à la bibliothèque `minmaxgd` pour Scilab, développée au sein du laboratoire LISA [Har06]

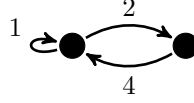


FIG. 1.3 – Graphe de précédence de la matrice A

1.2.3 Résolution d'inéquations particulières par résiduaction

Dans cette partie, nous allons introduire la théorie de la résiduaction, dont une référence essentielle est [BJ72]. Le lecteur pourra en trouver une synthèse dans [Coh98], ainsi que des rappels détaillés et des présentations approfondies de son application aux dioïdes dans [CG79, chapitre 10], [BCOQ92, section 4.4.2] et [Gau92, section 0.5].

Cette théorie s'appliquant sur des ensembles ordonnés, elle est par conséquent aussi valable pour les structures algébriques de dioïde.

Définition 23 (Résiduaction, résiduaction duale). *Soient $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ et $(\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$ deux dioïdes complets et $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ une application isotone. f est une application résiduable si $\forall b \in \mathcal{C}$, la borne supérieure du sous-ensemble $\{x \in \mathcal{D} \mid f(x) \preceq b\}$, notée $f^\sharp(b)$, existe et appartient à ce sous-ensemble. L'application f^\sharp est appelée la résiduée de f .*

De même, f est dualement résiduable si $\forall b \in \mathcal{C}$, la borne inférieure du sous-ensemble $\{x \in \mathcal{C} \mid f(x) \succeq b\}$, notée $f^\flat(b)$, existe et appartient à ce sous-ensemble. L'application f^\flat est appelée la résiduée duale de f .

Le théorème suivant fournit une caractérisation des applications résiduables et dualement résiduables.

Théorème 6. *Soient f et g deux applications respectivement résiduable et dualement résiduable. f^\sharp et g^\flat sont les uniques applications isotones respectivement s.c.s. et s.c.i. vérifiant :*

$$f \circ f^\sharp \preceq \text{Id}_{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad f^\sharp \circ f \succeq \text{Id}_{\mathcal{D}} \quad (1.2a)$$

$$g \circ g^\flat \succeq \text{Id}_{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad g^\flat \circ g \preceq \text{Id}_{\mathcal{D}} \quad (1.2b)$$

où $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ et $\text{Id}_{\mathcal{D}}$ sont les applications identité des deux ensembles ordonnés concernés.

Démonstration : Le lecteur pourra trouver une démonstration de ce théorème dans [BCOQ92, section 4.4.2]. \square

Une condition nécessaire et suffisante de l'existence de la résiduée et de la résiduée duale d'une application dans les dioïdes est fournie par le théorème qui suit.

Théorème 7. *Soient $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ et $(\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$ deux dioïdes complets dont les plus petits éléments respectifs sont $\varepsilon_{\mathcal{D}}$ et $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ et les plus grands éléments respectifs sont $\top_{\mathcal{D}}$ et $\top_{\mathcal{C}}$. L'application isotone $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est résiduable si et seulement si f est s.c.i. et $f(\varepsilon_{\mathcal{D}}) = \varepsilon_{\mathcal{C}}$. Cette même application f est dualement résiduable si et seulement si f est s.c.s. et $f(\top_{\mathcal{D}}) = \top_{\mathcal{C}}$.*

Démonstration :

- Si f est résiduable, l'ensemble $\{x \in \mathcal{D} \mid f(x) \preceq \varepsilon_{\mathcal{C}}\}$ admet un plus grand élément x_0 et, par isotonie de f , $f(\varepsilon_{\mathcal{D}}) \preceq f(x_0) \preceq \varepsilon_{\mathcal{C}}$. Comme, d'autre part, $f(\varepsilon_{\mathcal{D}}) \succeq \varepsilon_{\mathcal{C}}$, on en déduit $f(\varepsilon_{\mathcal{D}}) = \varepsilon_{\mathcal{C}}$. Montrons alors que f est s.c.i. Comme \mathcal{D} et \mathcal{C} sont des ensembles complets et f est isotone, on a pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{D} : f(\bigoplus_{x \in \mathcal{A}} x) \succeq \bigoplus_{x \in \mathcal{A}} f(x)$. Soit $f^\#$ la résiduée de f . En utilisant les inégalités (1.2) et le fait que $f^\#$ est isotone :

$$f\left(\bigoplus_{x \in \mathcal{A}} x\right) \preceq f\left(\bigoplus_{x \in \mathcal{A}} f^\# \circ f(x)\right) \preceq f \circ f^\#\left(\bigoplus_{x \in \mathcal{A}} f(x)\right) \preceq \bigoplus_{x \in \mathcal{A}} f(x)$$

ce qui démontre que f est s.c.i.

- Réciproquement, si $f(\varepsilon_{\mathcal{D}}) = \varepsilon_{\mathcal{C}}$, alors $\forall b \in \mathcal{C}$, l'ensemble $\mathcal{X} = \{x \in \mathcal{D} \mid f(x) \preceq b\}$ est non vide. On a $\forall x \in \mathcal{X}, f(x) \preceq b$, et donc $\bigoplus_{x \in \mathcal{X}} f(x) \preceq b$. L'application f étant par hypothèse s.c.i., on en déduit que la somme des solutions $(\bigoplus_{x \in \mathcal{X}} x)$ appartient aussi à \mathcal{X} . C'est bien la plus grande solution et f est résiduable.

La preuve de la deuxième partie du théorème concernant les applications dualement résiduables est similaire. \square

Corollaire 2. *Les applications $L_a : x \mapsto ax$ et $R_a : x \mapsto xa$, définies sur le dioïde complet \mathcal{D} , sont toutes les deux résiduables, car elles sont s.c.i. (le dioïde \mathcal{D} est complet par hypothèse) et ε est absorbant pour le produit ($L_a(\varepsilon) = a \otimes \varepsilon = \varepsilon = \varepsilon \otimes a = R_a(\varepsilon)$). Leurs résiduées sont généralement notées $L_a^\# = a \backslash x = \frac{x}{a}$ et $R_a^\# = x \not\backslash a = \frac{x}{a}$ respectivement.*

Ainsi $a \backslash b$ et $b \not\backslash a$ sont respectivement les plus grandes solutions des inéquations $ax \preceq b$ et $xa \preceq b$.

Les applications L_a et R_a possèdent certaines propriétés, qui ont été regroupées dans le tableau 1.2. On pourra en trouver les preuves dans [BCOQ92, pp. 180 – 182]. Ces propriétés sont vraies pour tout dioïde complet $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ avec $a, b, x \in \mathcal{D}$.

Exemple 10 (Partie entière). *L'injection canonique $\text{Inj} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ est résiduable et dualement résiduable. Elle admet pour résiduée $\text{Inj}^\#$ et résiduée duale Inj^\flat les applications « parties entières » pour lesquelles les valeurs sont respectivement arrondies à l'entier inférieur et supérieur. Habituellement, on utilise les notations suivantes $\text{Inj}^\#(x) = \lfloor x \rfloor$ et $\text{Inj}^\flat(x) = \lceil x \rceil$.*

Considérons maintenant les applications de certains des résultats précédents à des vecteurs et des matrices.

Lemme 1 ([BCOQ92, page 196]). *Soient deux vecteurs X et Y définis dans le dioïde complet $\mathcal{D}^{n \times 1}$ et la matrice $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$. Les inéquations $AX \preceq Y$ et $XA \preceq Y$ admettent alors respectivement pour plus grandes solutions la résiduée du produit à gauche $A \backslash Y$ et la résiduée du produit à droite $Y \not\backslash A$, avec $\forall i, j \in [1, n]$:*

$$(A \backslash Y)_i = \bigwedge_{j=1}^n (A_{ji} \backslash y_j) \text{ et } (Y \not\backslash A)_i = \bigwedge_{j=1}^n (y_j \not\backslash A_{ji}).$$

$\frac{x \wedge y}{a} = \frac{x}{a} \wedge \frac{y}{a}$	$\frac{x \wedge y}{a} = \frac{x}{a} \wedge \frac{y}{a}$	p.1
$\frac{x \oplus y}{a} \succcurlyeq \frac{x}{a} \oplus \frac{y}{a}$	$\frac{x \oplus y}{a} \succcurlyeq \frac{x}{a} \oplus \frac{y}{a}$	p.2
$\frac{x}{a \oplus b} = \frac{x}{a} \wedge \frac{x}{b}$	$\frac{x}{a \oplus b} = \frac{x}{a} \wedge \frac{x}{b}$	p.3
$\frac{x}{a \wedge b} \succcurlyeq \frac{x}{a} \oplus \frac{x}{b}$	$\frac{x}{a \wedge b} \succcurlyeq \frac{x}{a} \oplus \frac{x}{b}$	p.4
$a \frac{x}{a} \preccurlyeq x$	$\frac{x}{a} a \preccurlyeq x$	p.5
$\frac{ax}{a} \succcurlyeq x$	$\frac{xa}{a} \succcurlyeq x$	p.6
$a \frac{ax}{a} = ax$	$\frac{xa}{a} a = xa$	p.7
$\frac{a(a \setminus x)}{a} = \frac{x}{a}$	$\frac{(x \not\setminus a)a}{a} = \frac{x}{a}$	p.8
$\frac{x}{ab} = \frac{a \setminus x}{b}$	$\frac{x}{ba} = \frac{x \not\setminus a}{b}$	p.9
$\frac{a \setminus x}{b} = \frac{x \not\setminus b}{a}$	$\frac{x \not\setminus a}{b} = \frac{b \setminus x}{a}$	p.10
$b \frac{x}{a} \preccurlyeq \frac{x}{a \not\setminus b}$	$\frac{x}{a} b \preccurlyeq \frac{x}{b \setminus a}$	p.11
$\frac{x}{a} b \preccurlyeq \frac{xb}{a}$	$b \frac{x}{a} \preccurlyeq \frac{bx}{a}$	p.12
$\frac{x}{a} \oplus b \preccurlyeq \frac{x \oplus ab}{a}$	$\frac{x}{a} \oplus b \preccurlyeq \frac{x \oplus ab}{a}$	p.13

TAB. 1.2 – Formules impliquant la division dans un dioïde

Ainsi par exemple, l'opération $A \setminus Y$ revient en quelque sorte à réaliser le produit (à gauche) d'un vecteur Y par la matrice A où la multiplication a été remplacée par la division (à gauche) et l'addition par la borne inférieure. Pour faciliter les calculs, on utilise la propriété p.1 indiquant que l'opération \setminus est distributive par rapport à \wedge .

Exemple 11. Ainsi, d'après le lemme 1, quand le dioïde considéré est $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$, on a :

$$(A \setminus y)_i = \min_{j \in [1, m]} (-A_{ji} + y_j).$$

Le lemme qui suit vise à définir les divisions entre matrices à coefficients dans un dioïde \mathcal{D} . Mais avant cela, nous devons introduire les produits matriciels à gauche et à droite d'une matrice A , notés L_A et $R_{A'}$:

$$\begin{aligned} L_A : \mathcal{D}^{p \times q} &\rightarrow \mathcal{D}^{n \times q} & R_{A'} : \mathcal{D}^{q \times p} &\rightarrow \mathcal{D}^{q \times n} \\ X &\mapsto AX & (A \in \mathcal{D}^{n \times p}) & & X &\mapsto XA' & (A' \in \mathcal{D}^{p \times n}) \end{aligned}$$

Lemme 2. Soient les matrices $B \in \mathcal{D}^{n \times q}$ et $B' \in \mathcal{D}^{q \times n}$. D'après le lemme 1, les inéquations $AX \preccurlyeq B$ et $XA' \preccurlyeq B'$ admettent $L_A^\sharp(B)$ et $R_{A'}^\sharp(B')$ comme plus grandes solutions respectives. Les coefficients de ces matrices s'obtiennent par les relations :

$$(A \backslash B)_{ij} = \bigwedge_{k=1}^n (A_{ki} \backslash B_{kj}) \text{ et } (B' \not\! / A')_{ij} = \bigwedge_{k=1}^n (B'_{ik} \not\! / A'_{jk}).$$

Remarque 12 ([Cot99]). Les ensembles de définition de L_A et $R_{A'}$ ne peuvent pas, à première vue, être considérés comme des dioïdes matriciels (car le produit de matrices n'est pas toujours une opération interne). Pour que ces applications puissent être vues comme étant définies sur des dioïdes complets (matriciels), il faudrait en fait considérer le dioïde matriciel $\mathcal{D}^{m \times m}$, où $m = \max(n, q, p)$. L'ensemble des matrices $\mathcal{D}^{n \times q}$ est alors vu comme un sous-ensemble de $\mathcal{D}^{m \times m}$ de matrices dont certaines lignes et/ou colonnes sont remplies d'éléments ε de \mathcal{D} . L'inconvénient de cette écriture réside alors dans la manipulation de matrices pouvant être principalement constituées de valeurs nulles (au sens de \mathcal{D}), notamment lorsqu'on manipule des vecteurs. On s'autorisera donc par la suite l'écriture simplifiée des applications L_A et $R_{A'}$ où les matrices X , A et A' considérées ne sont pas nécessairement de même taille, mais de tailles compatibles pour le produit de matrices. On gardera tout de même à l'esprit la possibilité de tout récrire dans un dioïde matriciel $\mathcal{D}^{m \times m}$.

1.3 Structures particulières de dioïdes

Plusieurs extensions aux dioïdes définis dans la section 1.1 sont utilisées en fonction des besoins. Bien entendu, tous les résultats énoncés dans la section précédente s'appliquent aux cas particuliers que nous allons présenter.

La première extension définit la notion de polynômes, basée sur celle de séries en un nombre fini de variables. Elle permettra dans les chapitres suivants, tout comme en automatique classique des systèmes discrets avec la transformée en z , de regrouper en un seul et unique élément la dynamique générale d'un système stationnaire, au lieu d'étudier son comportement pour chaque valeur possible de ses entrées.

La seconde définit la notion d'intervalle pour les dioïdes et présente comment réaliser des calculs aux bornes. Nous montrerons par ailleurs que la théorie de la résiduation s'applique aussi dans cet ensemble ordonné.

1.3.1 Les dioïdes de séries formelles

À partir d'un dioïde \mathcal{D} , nous pouvons considérer l'ensemble des séries formelles en une ou plusieurs variables à coefficients dans \mathcal{D} . Par hypothèse, nous n'envisagerons que des variables commutatives (par exemple, pour des variables x_1 et x_2 , x_1x_2 et x_2x_1 seront considérés identiques). Les exposants des variables sont généralement pris dans les ensembles \mathbb{N} ou \mathbb{Z} .

Les références de base dans ce domaine sont [BR84, Fli72] pour les séries à coefficients dans un demi-anneau et un anneau. Le cas des dioïdes est assez spécifique et on doit l'essentiel des résultats dans ce contexte aux travaux de Pierre Moller [Mol88] et de Stéphane Gaubert [Gau92].

Définition 24 (Série formelle). Soient $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ un dioïde et $f : \mathbb{Z}^p \rightarrow \mathcal{D}$ une application. Pour $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $f(k)$ représente le coefficient de l'élément $x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p}$, où les x_1 à x_p sont p variables (commutatives) à coefficients dans \mathcal{D} que l'on regroupera en la variable x . On définit la série formelle F en les p indéterminées x_1 à x_p par :

$$F(x) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}^p} f(k) x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p}.$$

Définition 25 (Dioïde de séries formelles). L'ensemble des séries formelles en les p indéterminées x_1 à x_p forme un dioïde, noté $\mathcal{D}[[x_1, \dots, x_p]]$, s'il est muni des deux lois \oplus' et \otimes' suivantes :

$$\begin{aligned} F(x) \oplus' G(x) &\triangleq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}^p} [f(k) \oplus g(k)] x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p} \text{ et} \\ F(x) \otimes' G(x) &\triangleq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}^p} \left[\bigoplus_{i \boxplus j = k} f(i) \otimes g(j) \right] x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p}, \end{aligned}$$

où \boxplus est l'addition de vecteurs, coefficients à coefficients. L'élément neutre de la loi \oplus' est la série notée ε pour laquelle tous les coefficients des variables valent ε , pour tout k et l'élément neutre de la loi \otimes' est la série e dont le coefficient des variables $x_1^0 \dots x_p^0$ vaut $e \in \mathcal{D}$ et ε autrement.

Définition 26 (Support, degré, monôme et polynôme). On appelle support d'une série formelle $F(x)$ à p variables l'ensemble $\text{Supp}(F(x)) = \{k \in \mathbb{Z}^p \mid f(k) \neq \varepsilon\}$. Le degré d'une telle série, noté $\deg(F(x))$ est la borne supérieure de son support.

Un monôme est une série formelle dont le support se réduit à un singleton et un polynôme est une série formelle dont le support est fini. L'ensemble des polynômes formels $\mathcal{D}[x_1, \dots, x_p]$ est un sous-dioïde de $\mathcal{D}[[x_1, \dots, x_p]]$ (cf. la définition 14).

Définition 27 (Série rationnelle). Le sous-dioïde $\mathcal{D}^r[[x_1, \dots, x_p]]$ des séries rationnelles est le plus petit sous-dioïde de $\mathcal{D}[[x_1, \dots, x_p]]$ qui contient les polynômes $\mathcal{D}[x_1, \dots, x_p]$ et qui est stable pour les opérations \oplus , \otimes et \star .

Tout élément de $\mathcal{D}^r[[x_1, \dots, x_p]]$ s'écrit donc comme une expression finie de sommes, produits et étoiles de polynômes.

Proposition 1 (Complétude). Si \mathcal{D} est complet, alors $\mathcal{D}[[x_1, \dots, x_p]]$ l'est également.

1.3.2 Les dioïdes d'intervalles

L'analyse par intervalles dans un demi-anneau idempotent a été proposée initialement par Litvinov et Sobolevskiï dans leur article [LS01]. Ils y ont montré que les solutions d'équations basées sur des intervalles dans un dioïde peuvent être calculées en un temps plus rapide que dans l'analyse par intervalles classique, en temps polynomial en l'occurrence⁸. Ces travaux ont été repris par

8. bien entendu, ces deux modèles, basés sur deux structures algébriques différentes, ne représentent pas les mêmes problèmes. Un changement de modélisation ne change pas la complexité d'un problème

Mehdi Lhommeau pour la synthèse de contrôleurs robustes, utilisés sur des systèmes présentant des incertitudes [LHCJ04, Lho03]. Nous présentons dans cette partie la construction d'un dioïde d'intervalles et montrons notamment que la théorie de la résiduation s'applique dans le cadre de ces dioïdes aussi.

Définitions et propriétés

Définition 28 (Intervalle). *Un intervalle fermé dans le dioïde \mathcal{D} est un ensemble de la forme $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}] = \{t \in \mathcal{D} \mid \underline{x} \preceq t \preceq \bar{x}\}$ où \underline{x} et \bar{x} , appartenant au dioïde \mathcal{D} , sont appelées respectivement borne inférieure et supérieure de l'intervalle \mathbf{x} .*

Remarque 13 (Intervalle dégénéré). *Un intervalle \mathbf{x} pour lequel $\underline{x} = \bar{x}$ est appelé un intervalle dégénéré. Ce type d'intervalles permet de représenter des éléments sans incertitude.*

Remarque 14. *Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux intervalles. On dira que $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$ si et seulement si $\underline{y} \preceq \underline{x} \preceq \bar{x} \preceq \bar{y}$. En particulier, $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$ et $\bar{x} = \bar{y}$.*

Théorème 8 (Dioïde d'intervalles). *Soit $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ un dioïde. L'ensemble $I(\mathcal{D})$ des intervalles fermés de \mathcal{D} muni des opérations $\hat{\oplus}$ et $\hat{\otimes}$ définies par $\mathbf{x} \hat{\oplus} \mathbf{y} = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$, et $\mathbf{x} \hat{\otimes} \mathbf{y} = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \bar{x} \otimes \bar{y}]$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in I(\mathcal{D})$ est un dioïde. Les intervalles $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon, \varepsilon]$ et $\mathbf{e} = [e, e]$ sont respectivement les éléments neutres des opérations $\hat{\oplus}$ et $\hat{\otimes}$.*

Démonstration : Comme $\underline{x} \preceq \bar{x}$ et $\underline{y} \preceq \bar{y}$, on a toujours :

$$\underline{x} \oplus \underline{y} \preceq \bar{x} \oplus \bar{y}.$$

Par ailleurs, grâce à l'isotonie de \otimes , on peut remarquer, toujours pour $\underline{x} \preceq \bar{x}$ et $\underline{y} \preceq \bar{y}$, que :

$$\underline{x} \otimes \underline{y} \preceq \bar{x} \otimes \bar{y}.$$

L'ensemble $I(\mathcal{D})$ est donc fermé pour les opérations $\hat{\oplus}$ et $\hat{\otimes}$. De plus, on vérifie aisément que :

- $(I(\mathcal{D}), \hat{\oplus})$ est un monoïde commutatif et idempotent, qui admet pour élément neutre $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon, \varepsilon]$.
- $(I(\mathcal{D}), \hat{\otimes})$ est un monoïde, qui admet pour élément neutre $\mathbf{e} = [e, e]$.
- Le produit $\hat{\otimes}$ est distributif à droite et à gauche sur la somme $\hat{\oplus}$.
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ est absorbant pour le produit $\hat{\otimes}$.

Par conséquent, $I(\mathcal{D})$ est un dioïde (conformément à la définition 13, page 21). \square

Définition 29 (Relation d'ordre). *L'opération $\hat{\oplus}$ induit une relation d'ordre canonique $\preceq_{I(\mathcal{D})}$ dans le dioïde $I(\mathcal{D})$:*

$$\mathbf{a} \preceq_{I(\mathcal{D})} \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b} = \mathbf{a} \hat{\oplus} \mathbf{b} \Leftrightarrow \underline{a} \preceq_{\mathcal{D}} \underline{b} \text{ et } \bar{a} \preceq_{\mathcal{D}} \bar{b}.$$

Théorème 9 ([LS01]). *Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I(\mathcal{D})$, l'intervalle $\mathbf{x} \hat{\oplus} \mathbf{y}$ (respectivement $\mathbf{x} \hat{\otimes} \mathbf{y}$) est le plus petit intervalle de $I(\mathcal{D})$ contenant l'ensemble $\{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$ (respectivement $\{x \otimes y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$).*

Démonstration : On considère l'intervalle \mathbf{z} de $I(\mathcal{D})$ tel que $\{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset \mathbf{z}$. On a alors $\underline{x} \oplus \underline{y} \in \{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset \mathbf{z}$ et $\bar{x} \oplus \bar{y} \in \{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset \mathbf{z}$. Ainsi, $\underline{z} \preceq \underline{x} \oplus \underline{y}$ et $\bar{x} \oplus \bar{y} \preceq \bar{z}$, c'est-à-dire $\underline{z} \preceq \underline{x} \oplus \underline{y} \preceq \bar{x} \oplus \bar{y} \preceq \bar{z}$. Ce qui signifie que l'intervalle $[\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}] = \mathbf{x} \hat{\oplus} \mathbf{y} \subset \mathbf{z}$. Autrement dit, l'intervalle $[\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$ est contenu dans tout intervalle contenant l'ensemble $\{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset \mathbf{z}$.

Soit $t \in \{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset \mathbf{z}$ et $x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}$ tels que $t = x \oplus y$. D'après la définition d'un intervalle, $\underline{x} \preceq x \preceq \bar{x}$ et $\underline{y} \preceq y \preceq \bar{y}$. De plus, comme dans un dioïde la loi \oplus est compatible avec l'ordre, on peut écrire $\underline{x} \oplus \underline{y} \preceq x \oplus y \preceq \bar{x} \oplus \bar{y}$. Ce qui signifie que $t \in [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$, c'est-à-dire $\{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$.

On peut donc conclure que $[\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$ est le plus petit intervalle contenant l'ensemble $\{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$.

Pour la loi \otimes , la démonstration est analogue. \square

Remarque 15. *Le théorème précédent est important puisqu'il montre que les opérations*

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \hat{\oplus} \mathbf{y} &= \{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \text{ et} \\ \mathbf{x} \hat{\otimes} \mathbf{y} &= \{x \otimes y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}\end{aligned}$$

peuvent être représentées en utilisant seulement les bornes des intervalles \mathbf{x} et \mathbf{y} . On peut alors donner du sens à une expression comme

$$a \otimes b \oplus c \otimes a,$$

pour tous $a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}$ et $c \in \mathbf{c}$, puisque l'on sait que le résultat de cette expression appartient à l'intervalle $\mathbf{a} \hat{\otimes} \mathbf{b} \hat{\oplus} \mathbf{c} \hat{\otimes} \mathbf{a}$. Autrement dit, l'ensemble $\{a \otimes b \oplus c \otimes a \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}, c \in \mathbf{c}\}$ est inclus dans l'intervalle $[(\underline{a} \otimes \underline{b}) \oplus (\underline{c} \otimes \underline{a}), (\bar{a} \otimes \bar{b}) \oplus (\bar{c} \otimes \bar{a})]$.

On peut étendre naturellement les applications isotones au dioïde des intervalles $I(\mathcal{D})$. En considérant l'application f isotone, l'image par f d'un intervalle \mathbf{x} est donné par :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{f(x) \mid x \in \mathbf{x}\}.$$

Comme la fonction f est isotone, on peut calculer les valeurs de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ directement à partir des bornes de l'intervalle \mathbf{x} , c'est-à-dire $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f(\underline{x}), f(\bar{x})]$.

Théorème 10. *Les applications isotones conservent l'inclusion d'intervalles. C'est-à-dire, soit l'application \mathbf{f} définie sur $I(\mathcal{D})$, on a :*

$$\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

Démonstration : Soient $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$ et $\mathbf{y} = [\underline{y}, \bar{y}]$ deux intervalles de $I(\mathcal{D})$. On suppose que $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$, alors on a $\underline{y} \preceq \underline{x} \preceq \bar{x} \preceq \bar{y}$. Puisque l'application f est isotone, on obtient $f(\underline{y}) \preceq f(\underline{x}) \preceq f(\bar{x}) \preceq f(\bar{y})$. on vérifie bien que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{f}(\mathbf{y})$. \square

Définition 30. *Soient \mathcal{D} un dioïde complet et $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ un sous-ensemble infini de $I(\mathcal{D})$. La série infinie des éléments de ce sous-ensemble est définie par :*

$$\bigoplus_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} = \left[\bigoplus_{\alpha} \underline{x}_{\alpha}, \bigoplus_{\alpha} \bar{x}_{\alpha} \right] \quad (1.3)$$

Théorème 11 ([LS01]). *Un dioïde $I(\mathcal{D})$ est complet si le dioïde \mathcal{D} l'est.*

Démonstration : Si \mathcal{D} est complet, alors l'intervalle $\bigoplus_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha}$ défini par (1.3) appartient à $I(\mathcal{D})$. La complétude de \mathcal{D} implique aussi, pour un ensemble vide $\mathbf{X} \subset I(\mathcal{D})$, que $\bigoplus \mathbf{X} = \varepsilon$ et $\mathbf{y} \hat{\otimes} (\bigoplus \mathbf{X}) = (\bigoplus \mathbf{X}) \hat{\otimes} \mathbf{y} = \varepsilon, \forall \mathbf{y} \in I(\mathcal{D})$. Considérons maintenant le sous-ensemble non vide $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_{\alpha}\}$ de $I(\mathcal{D})$, on vérifie aisément la propriété de distributivité infinie :

$$\mathbf{y} \hat{\otimes} \left(\bigoplus_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \right) = \left[\bigoplus_{\alpha} (\underline{y} \otimes \underline{x}_{\alpha}), \bigoplus_{\alpha} (\overline{y} \otimes \overline{x}_{\alpha}) \right] = \bigoplus_{\alpha} (\mathbf{y} \hat{\otimes} \mathbf{x}_{\alpha}).$$

De même, $\left(\bigoplus_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \right) \hat{\otimes} \mathbf{y} = \bigoplus_{\alpha} (\mathbf{x}_{\alpha} \hat{\otimes} \mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in I(\mathcal{D})$. Ainsi le dioïde $I(\mathcal{D})$ est complet si le dioïde \mathcal{D} est complet. \square

Résolution d'équations et d'inéquations dans le dioïde $I(\mathcal{D})$

La résolution d'équations et d'inéquations dans les dioïdes d'intervalles sera également un problème central de nos études. Comme nous le montrons ci-dessous, l'étoile de Kleene est aussi définie dans les dioïdes d'intervalles et la théorie de la résiduation s'applique également à ces dioïdes.

Remarque 16. *On sait par construction (d'après le théorème 8), que le dioïde d'intervalles $I(\mathcal{D})$ est fermé vis-à-vis des opérations $\hat{\oplus}$ et $\hat{\otimes}$. Ainsi l'étoile de Kleene admet une extension naturelle dans les intervalles et elle vaut par définition $\mathbf{x}^* \triangleq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{x}^i = \left[\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \underline{x}^i, \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \overline{x}^i \right] = [\underline{x}^*, \overline{x}^*]$, avec $\mathbf{x}^0 = \mathbf{e}$*

Théorème 12. *Soit un dioïde \mathcal{D} complet. L'application $\mathbf{L}_{\mathbf{a}} : I(\mathcal{D}) \rightarrow I(\mathcal{D}), \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \hat{\otimes} \mathbf{x}$ est résiduable et sa résiduée est donnée par $\mathbf{L}_{\mathbf{a}}^{\sharp}(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \hat{\oslash} \mathbf{b} = [\underline{a} \hat{\oslash} \underline{b} \wedge \overline{a} \hat{\oslash} \overline{b}, \overline{a} \hat{\oslash} \overline{b}]$. De même, l'application $\mathbf{R}_{\mathbf{a}} : I(\mathcal{D}) \rightarrow I(\mathcal{D}), \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \hat{\otimes} \mathbf{a}$ est résiduable et sa résiduée est donnée par $\mathbf{R}_{\mathbf{a}}^{\sharp}(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \hat{\oslash} \mathbf{b} = [\underline{b} \hat{\oslash} \underline{a} \wedge \overline{b} \hat{\oslash} \overline{a}, \overline{b} \hat{\oslash} \overline{a}]$.*

Démonstration : La démonstration de ces résultats, qui nécessite la définition du dioïde de couples $C_0(\mathcal{D})$ ainsi que celle de la restriction du domaine ou du codomaine d'une application, pourra être trouvée dans [LHCJ04] ou [Lho03, section 4.3.1]. \square

Extension matricielle

Dans cette partie, on généralise les définitions et les règles précédentes concernant les dioïdes d'intervalles au cas matriciel.

Définition 31 (Matrice d'intervalles). *Une matrice d'intervalles \mathbf{A} à m lignes et n colonnes est définie par :*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

où les \mathbf{a}_{ij} sont des éléments de $I(\mathcal{D})$. L'ensemble des matrices d'intervalles à m lignes et n colonnes sera noté $(I(\mathcal{D}))^{m \times n}$.

Les matrices $\underline{\mathbf{A}} = (\underline{a}_{ij})$ et $\overline{\mathbf{A}} = (\overline{a}_{ij})$ sont appelées respectivement la matrice inférieure et supérieure de la matrice d'intervalles \mathbf{A} .

Remarque 17. Si $I(\mathcal{D})$ est un dioïde, alors $(I(\mathcal{D}))^{m \times n}$ peut être muni d'une structure de dioïde (voir l'exemple 6, page 21). La somme $\hat{\oplus}$ et le produit $\hat{\otimes}$ d'intervalles s'étendent naturellement au dioïde des matrices d'intervalles.

Remarque 18. En considérant l'ordre canonique partiel, il est possible de donner une autre description des matrices d'intervalles. En effet, la matrice $\mathbf{A} \in (I(\mathcal{D}))^{m \times n}$ correspond aussi à l'intervalle $[\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}] = \{B \in \mathcal{D}^{m \times n} \mid \underline{\mathbf{A}} \preceq B \preceq \overline{\mathbf{A}}\}$ pour $\underline{\mathbf{A}}$ et $\overline{\mathbf{A}}$ appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}^{m \times n}$.

Ces deux descriptions peuvent sembler différentes. En effet, pour la première description, on a $\mathbf{A} \in (I(\mathcal{D}))^{m \times n}$, alors que dans la deuxième, $\mathbf{A} = [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}] \in I(\mathcal{D}^{m \times n})$. Il est possible de montrer que l'application $\mathbf{A} \in (I(\mathcal{D}))^{m \times n} \mapsto [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}] \in I(\mathcal{D}^{m \times n})$ est un isomorphisme entre les dioïdes $(I(\mathcal{D}))^{m \times n}$ et $I(\mathcal{D}^{m \times n})$. Cet isomorphisme est évident en considérant le théorème 9. En effet, il implique que les sommes et produits de matrices d'intervalles sont réduits à la somme et le produit de leurs matrices inférieures et supérieures.

1.4 Bilan

L'ensemble des théories nécessaires à nos contributions ont été parcourues dans ce chapitre introductif. C'est à la lumière de ces théories que nous étudierons les systèmes présentant différents types de conflits dans les chapitres suivants.

Une définition essentielle de ce chapitre est celle de la structure de dioïde, qui est la base algébrique fondamentale de nos travaux. Le formalisme des dioïdes est intéressant car il permet de représenter de manière linéaire les phénomènes de synchronisation, très présents dans les systèmes manufacturiers de production qui sont au cœur de nos études. Ces derniers présentent pour la plupart des zones de conflit à résoudre en temps réel, ce qui ne permet pas de caractériser leurs comportements de manière exacte à priori. À cause de ce caractère imprévisible, nous serons obligés de considérer les pires et meilleurs cas possibles, englobant le comportement effectif des systèmes abordés. Nous serons donc amenés à manipuler des intervalles de comportements.

Le chapitre suivant décrit comment appliquer ces différentes théories à l'étude de systèmes dynamiques à événements discrets. En particulier, nous chercherons à représenter des systèmes sous forme graphique, basée sur le formalisme des réseaux de Petri (et plus particulièrement celui des graphes d'événements temporisés). Ensuite nous verrons comment ces graphes peuvent être représentés dans des dioïdes appropriés.

Chapitre 2

Modèles et systèmes linéaires

Les recherches en théorie des systèmes ont permis d'obtenir un vaste ensemble de résultats pour l'analyse des systèmes, qu'ils soient linéaires ou non. En particulier, les systèmes non linéaires sont souvent considérés par le biais d'un modèle linéaire les approchant, ou du modèle linéarisé équivalent. Mais cette démarche n'est pas toujours possible, comme pour les systèmes dynamiques à événements discrets¹ (SDED ou, plus simplement, SED). Ces systèmes, pour la plupart de conception humaine, présentent un certain nombre de synchronisations qui sont, par essence, non linéaires dans les structures algébriques habituelles. Trois champs d'application sont particulièrement importants :

- Les systèmes manufacturiers de production (ateliers flexibles, lignes d'assemblage), comme ceux étudiés par l'équipe de Guy Cohen dans [CDQV83, CDQV85a].
- Les réseaux de communication (réseaux informatiques), pour lesquels un ouvrage de référence est [LBT01].
- Les systèmes de transport (routiers, ferroviaires ou aériens), dont des études dans les structures algébriques de dioïdes peuvent être trouvées dans [LMQ01, HOvdW05, Hou06, CATBM09].

Néanmoins, il a été mis en évidence, dès les années 60, que parmi les systèmes à événements discrets, ceux mettant en jeu des phénomènes de synchronisations et de délais peuvent être modélisés de façon exacte dans des structures algébriques particulières : les dioïdes, que nous avons présentés dans le premier chapitre [CG60, CG62].

Ce deuxième chapitre a pour but de montrer comment, dans ce contexte algébrique particulier, sont transposés certains concepts et résultats de la théorie des systèmes dynamiques. La première section présente le formalisme des réseaux de Petri (RdP), qui peuvent être exprimés sous forme de graphes et qui permettent de capturer la dynamique du comportement de SDED. Il existe plusieurs sous-classes de RdP, dont les graphes d'événements temporisés (GET), qui ne permettent pas de représenter de conflits. Cependant, ces derniers présentent la particularité de pouvoir être retranscrits dans des dioïdes appropriés,

1. cette appellation a été utilisée pour la première fois par Ho et Cassandras dans leur article [HC80]

et vice versa, comme nous le verrons dans la section suivante. On peut donc systématiquement disposer d'un modèle analytique correspondant à un GET. À la fin de cette section, nous présentons la sémantique de graphes d'événements dont les temporisations sont incertaines mais dont les ensembles de possibilités sont connues. On peut donc les encadrer dans des intervalles et conserver cette transposition possible vers une représentation analytique, dans un dioïde d'intervalles cette fois-ci.

Le marquage instantané des places d'un RdP temporisé est souvent le modèle retenu pour définir les états de ce RdP. Cependant il existe d'autres représentations d'états possibles, en s'intéressant non plus aux places mais aux transitions d'un RdP, par exemple via les dates de leurs tirs successifs, ou le nombre de fois où ces dernières sont tirées, à une date donnée. La deuxième section de ce chapitre expose ces deux approches et montre comment l'on peut systématiquement représenter des SED sous une forme récurrente canonique. Puis, en référence à la théorie du signal, le comportement entrée-sortie de systèmes sera considéré comme une réponse à des impulsions (en l'occurrence, des événements en entrée, comme l'arrivée de matières premières). Enfin, est exposée la manière de représenter des SED sous forme de fonctions ou de matrices de transfert, afin de synthétiser leurs comportements entrée-sortie.

Pour finir, dans la section 2.3, nous abordons la notion de composition de systèmes ; c'est-à-dire les différents liens possibles entre des systèmes identifiés, et permettant de former des systèmes plus complexes.

2.1 Modélisation graphique de systèmes à événements discrets

Les réseaux de Petri (RdP) sont un formalisme privilégié pour l'étude des propriétés qualitatives d'un système complexe [Mur89]. On peut citer la détection d'interblocages, la bornitude, la vivacité et l'accessibilité d'état d'un RdP. Cependant dans notre étude, nous nous intéressons plutôt aux propriétés quantitatives qui peuvent exister entre les différentes places et/ou transitions d'un RdP. Il s'agit d'établir des relations entre elles, qui pourront aisément être formalisées dans un dioïde approprié. Nous traiterons plus particulièrement une sous-classe de réseaux de Petri : les graphes d'événements. Nous verrons qu'il est possible de considérer l'écoulement du temps dans des RdP dit temporisés, puis étudierons le cas de temporisations incertaines.

2.1.1 Les réseaux de Petri

Le concept des réseaux de Petri (RdP) a été introduit par Carl Adam Petri, dans le cadre de la théorie des automates, dans sa thèse de 1962 [Pet62]. Ces réseaux constituent des modèles tant graphiques que mathématiques dont le but est la représentation du comportement de systèmes dynamiques à événements discrets. Ce formalisme a reçu un bon écho de la part de la communauté scientifique et de très nombreux travaux de recherche utilisant les RdP ont été menés ces 40 dernières années. Nous pouvons citer en particulier les références bibliographiques qui ont servi à la rédaction de cette partie : [DA89, Mur89, Dia01].

Les RdP ont d'abord été utilisés dans un contexte où l'écoulement du temps n'intervenait pas. Les logiciens et les informaticiens les employaient pour vérifier

des propriétés structurelles des systèmes, comme par exemple vérifier qu'aucune situation de blocage ne pouvait apparaître dans le déroulement d'une séquence d'instructions. Une utilisation concrète des RdP pour étudier les systèmes de production ne remonte qu'aux années 80 [DS83, CMQV84, CDQV85a, CMQV89]. Auparavant, on privilégiait des diagrammes de flux de type PERT² [Gia88, Chapitre 4]. Situant nos travaux dans le domaine de la productique, nous cherchons tout particulièrement à déterminer la quantité de biens produits durant un certain laps de temps.

Les systèmes qui font l'objet de nos études pourront être considérés aussi bien selon le point de vue algébrique que graphique ; les deux représentations sont équivalentes. On sera ainsi amenés à manipuler des matrices semblables à des matrices d'adjacence³ du graphe représentant le système. Dans ces matrices, chaque ligne et chaque colonne représente une transition du graphe. Les coefficients valent 1⁴ s'il existe une place entre les deux transitions concernées par ce coefficient ou 0⁴ sinon. Inversement, on peut associer à toute matrice carrée un graphe valué orienté, appelé « graphe de précédence » (cf. l'annexe A.3.1).

Définitions et notations

Définition 32 (Réseau de Petri). *Un réseau de Petri est un quadruplet $\mathcal{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, \text{Pré}, \text{Post})$ où :*

- \mathcal{P} est un ensemble non vide et fini dont les éléments sont appelés places ;
- \mathcal{T} est un ensemble non vide et fini d'éléments appelés transitions ;
- $\text{Pré} : \mathcal{P} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application d'incidence avant : $\text{Pré}(p, t)$ contient la valeur entière associée à l'arc allant de p à t ;
- $\text{Post} : \mathcal{P} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application d'incidence arrière : $\text{Post}(p, t)$ contient la valeur entière associée à l'arc allant de t à p ;

Un RdP peut être représenté par un graphe biparti orienté et valué dont les sommets sont soit des places issues de l'ensemble \mathcal{P} , soit des transitions issues de l'ensemble \mathcal{T} . Un arc relie une place p à une transition t si et seulement si $\text{Pré}(p, t) \neq 0$. De même, un arc relie une transition t à une place p si et seulement si $\text{Post}(p, t) \neq 0$. Les valeurs non nulles des applications Pré et Post sont associées aux arcs⁵ comme valuations ou pondérations (sans indication contraire sur les arcs du graphe, la valeur par défaut est 1). On représente généralement une place par un cercle et une transition par un rectangle.

Définition 33 (Marquage). *Le marquage \mathcal{M} d'un réseau de Petri est une application $\mathcal{M} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$. La quantité $\mathcal{M}(p)$ détermine le marquage de la place p . Un réseau de Petri marqué est déterminé par le couple $(\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$ formé d'un réseau de Petri \mathcal{R} et d'un marquage initial \mathcal{M}_0 .*

Un marquage d'un réseau de Petri se caractérise de manière graphique par la présence de $\mathcal{M}(p)$ jetons en chaque place p .

Exemple 12. *Un exemple de réseau de Petri marqué sous forme graphique est donné par la figure 2.1.*

2. de l'acronyme anglais "Program (ou Project) Evaluation Review Technique"

3. pour être précis, ce sont des sous-parties de la matrice d'adjacence, car elles n'indiquent que les liens existant entre des partitions de l'ensemble des transitions. Cf. la notation 4, page 43

4. au sens de la structure algébrique utilisée, comme nous le verrons ultérieurement

5. le graphe étant biparti, il n'y a pas d'arc joignant une place à une place ou d'arc joignant une transition à une autre transition

Les ensembles des places et des transitions sont ici $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$ et $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$. On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} \text{Pré}(p_1, t_1) &= 1 & \text{Post}(p_1, t_2) &= 1 \\ \text{Pré}(p_2, t_2) &= 1 & \text{Post}(p_2, t_1) &= 1 \\ \text{Pré}(p_3, t_3) &= 1 & \text{Post}(p_3, t_4) &= 1 \\ \text{Pré}(p_2, t_4) &= 1 & \text{Post}(p_2, t_3) &= 1 \end{aligned}$$

Le marquage \mathcal{M} présenté ici est $\mathcal{M}(p_2) = 1$ et $\mathcal{M}(p_1) = \mathcal{M}(p_3) = 0$.

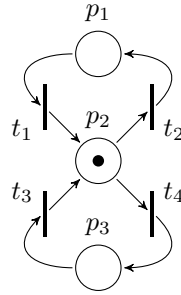


FIG. 2.1 – Exemple de RdP marqué

Tir des transitions

La dynamique d'un RdP est liée aux tirs de ses transitions. Ces tirs consomment et génèrent des jetons. L'évolution au cours du temps des marques des places dans un réseau de Petri définit son comportement dynamique.

Définition 34 (Transition franchissable). *Étant donné un réseau de Petri \mathcal{R} et un marquage \mathcal{M} , on dit que la transition $t \in \mathcal{T}$ est franchissable pour \mathcal{M} si l'on a :*

$$\forall p \in \mathcal{P}, \mathcal{M}(p) \geq \text{Pré}(p, t).$$

Lorsque cette condition est satisfaite, l'activation (on dit aussi « le tir ») de la transition t conduit à un nouveau marquage \mathcal{M}' défini, $\forall p \in P$, par :

$$\mathcal{M}'(p) = \mathcal{M}(p) - \text{Pré}(p, t) + \text{Post}(p, t).$$

Ainsi par exemple, en reprenant le cas du réseau de la figure 2.1 et en partant du marquage $\mathcal{M}_0 = (0, 1, 0)$ (c'est-à-dire $\mathcal{M}(p_1) = \mathcal{M}(p_3) = 0$ et $\mathcal{M}(p_2) = 1$), on atteint par tir de la transition t_1 le marquage $\mathcal{M}_1 = (1, 0, 0)$; puis à partir de \mathcal{M}_1 , par tir de la transition t_3 , on obtient le marquage $\mathcal{M}_2 = (0, 1, 0)$ et ainsi de suite. Concrètement, l'activation d'une transition provoque le retrait d'un jeton dans chaque place amont de cette transition et un jeton est placé dans chacune de ses places aval⁶. Sur la figure 2.2, on peut voir les évolutions possibles du marquage du réseau de Petri.

6. dans le cas de RdP généralisés, c'est-à-dire quand les valeurs de $\text{Pré}(p, t)$ et de $\text{Post}(p, t)$ peuvent être supérieures à 1 (on parle dans ce cas d'arcs pondérés), le nombre de jetons retirés ou placés correspond aux valeurs des arcs concernés

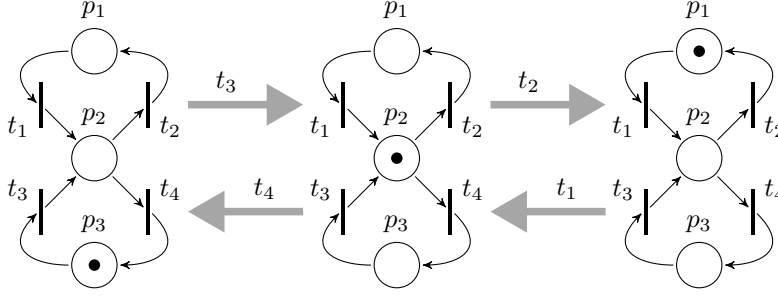


FIG. 2.2 – Évolution du marquage d'un réseau de Petri

On peut donc considérer ce RdP comme un système, par exemple industriel, où 2 tâches a et b utilisent une même ressource réutilisable. Un jeton dans la place p_2 signifie que la ressource est disponible. Un jeton dans la place p_1 (respectivement p_3) signifie que la tâche a (resp. b) dispose de la ressource commune. Le tir de la transition t_2 est l'événement correspondant à la réservation de la ressource par la tâche a . De même, la transition t_4 correspond à la réservation de la ressource par la tâche b . Les événements associés aux transitions t_1 et t_3 concernent la restitution de la ressource, par l'une ou l'autre des tâches.

Plus généralement, $\forall p \in \mathcal{P}, \forall t \in \mathcal{T}$, en introduisant la matrice d'incidence avant $W^- = [\text{Pré}(p, t)]$, la matrice d'incidence arrière $W^+ = [\text{Post}(p, t)]$ et la matrice d'incidence $W = W^+ - W^-$, tout en considérant une séquence S de franchissement réalisable à partir d'un marquage \mathcal{M} , il est possible de donner l'équation fondamentale suivante :

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M} + W \cdot \vec{S}, \quad (2.1)$$

où \vec{S} est le vecteur caractéristique de la séquence de franchissement S , c'est-à-dire un vecteur dont la dimension est égale au nombre de transitions du réseau de Petri et dont la composante numérotée j correspond au nombre de franchissements de la transition t_j dans cette séquence. Ainsi, en reprenant le RdP de l'exemple précédent, si l'on tire les transitions t_4 puis t_3 , le vecteur caractéristique \vec{S} est à égal à $(0, 0, 1, 1)$.

Remarque 19. L'équation fondamentale (2.1) traduit la dynamique de fonctionnement du réseau de Petri.

Ensemble des marquages accessibles

Soit $\mathcal{P} = (\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$ un RdP marqué. L'ensemble des marquages accessibles de \mathcal{P} , noté $A(\mathcal{P})$, est l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre à partir du marquage initial \mathcal{M}_0 par une séquence de franchissement S . On peut, lorsque cet ensemble est fini, le représenter sous la forme d'un graphe. Les sommets de ce graphe correspondent aux différents marquages accessibles de $A(\mathcal{P})$. Un arc orienté relie deux sommets \mathcal{M}_i et \mathcal{M}_j s'il existe une transition t franchissable permettant de passer d'un marquage à un autre, ce qui se note $\mathcal{M}_i \xrightarrow{t} \mathcal{M}_j$. Ainsi, on peut noter plus formellement l'ensemble $A(\mathcal{P})$ de la manière suivante :

$$A(\mathcal{P}) = \{\mathcal{M}_i \mid \exists S, \mathcal{M}_0 \xrightarrow{S} \mathcal{M}_i\}.$$

La figure 2.3 représente le graphe des marquages accessibles pour le réseau de Petri de la figure 2.1 avec un marquage initial $\mathcal{M}_0 = (0, 1, 0)$. On peut noter la ressemblance entre cette figure et la présentation des marquages possibles de la figure 2.2.

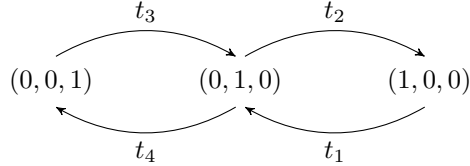
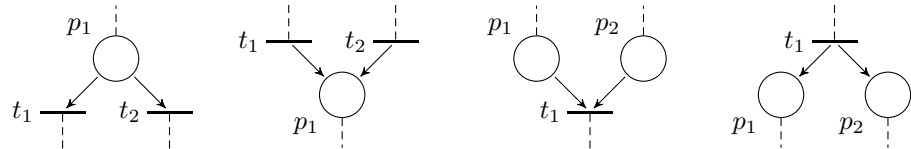


FIG. 2.3 – Exemple de graphe des marquages accessibles

Synchronisations et concurrences

Le formalisme des réseaux de Petri est suffisamment puissant pour permettre de représenter, de façon fine et précise, une grande variété de comportements de systèmes réels mettant en jeu des phénomènes de concurrence et de synchronisation. Sur la figure 2.4, nous avons représenté quatre motifs de réseaux de Petri permettant de les décrire.

- La figure 2.4 (a) représente une structure nécessitant un choix. La place p_1 a deux transitions aval, notées t_1 et t_2 . Formellement, cette situation arrive si la proposition suivante est vraie : $\exists p \in \mathcal{P}, \text{Pré}(p, t_1) \times \text{Pré}(p, t_2) \neq 0$. Le tir de t_1 ou de t_2 consomme le jeton de la place p_1 et exclue donc le tir de l'autre. Une telle configuration permet de modéliser un phénomène de concurrence à la consommation, comme par exemple le partage d'un processeur entre des tâches concurrentes dans un système informatique ;
- la configuration de la figure 2.4 (b) permet quant à elle de modéliser une concurrence à l'apport de jetons dans une place, ici p_1 ;
- le motif de la figure 2.4 (c) représente un phénomène de rendez-vous. La transition t_1 n'est franchissable que lorsque les places p_1 et p_2 contiennent toutes les deux au moins un jeton ;
- dans la structure de la figure 2.4 (d), l'apport de jetons dans les places p_1 et p_2 est synchronisé par le tir de la transition t_1 et permet, par exemple, de modéliser l'initialisation simultanée de différentes tâches dans un système à événements discrets.



(a) Concurrence à la consommation (b) Concurrence à la production (c) Synchronisation dans la consommation (d) Synchronisation dans la production

FIG. 2.4 – Concurrences et synchronisations dans les RdP

Transitions source et puits

Définition 35 (Transitions source et puits). *Une transition sans place amont est dite transition source et une transition sans place aval est dite transition puits.*

Une transition source sera considérée comme pouvant être tirée par « le monde extérieur ». La fréquence de tir d’une telle transition est généralement liée à une loi constante ou probabiliste modélisant la période d’arrivée d’un élément en entrée du système. Ceci permet l’apport de jetons dans le RdP. On fait donc abstraction de tout ce qui peut se passer autour du système.

À l’opposé, on considère qu’une transition puits délivre des jetons à l’extérieur du réseau de Petri. Vis-à-vis du système modélisé, une telle transition correspond à une sortie. C’est l’influence du système sur le monde extérieur.

On supposera de plus que seules les transitions (et non les places) peuvent être des puits ou des sources. Cette hypothèse n’induit pas de perte de généralité puisque rien n’empêche d’ajouter une transition en amont ou en aval d’une place source ou puits [Mur89]. Par ailleurs, on considérera éventuellement des systèmes possédant plusieurs transitions puits et/ou sources. En fonction du cas modélisé, nous utiliserons la dénomination anglaise correspondante (“Single in”/“Multiple in” – “Single out”/“Multiple out”), et nous les appellerons donc des systèmes “SISO”, “SIMO”, etc.

Notation 4 (Partitionnement des transitions). *Afin de distinguer les différents types de transition d’un RdP, on aura souvent recours à la partition*

$$\mathcal{T} = \mathcal{U} \cup \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}, \text{ avec } \mathcal{U} \cap \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \emptyset,$$

où

- \mathcal{U} désigne l’ensemble des transitions sources ;
- \mathcal{X} désigne l’ensemble des transitions internes ;
- \mathcal{Y} désigne l’ensemble des transitions puits.

On notera t_i une transition appartenant indifféremment à l’un de ces trois sous-ensembles. On désignera plus spécialement par $u_j \in \mathcal{U}$ (respectivement $x_k \in \mathcal{X}$ et $y_l \in \mathcal{Y}$) une transition source (resp. interne et puits), pour $j \in [1, \text{Card}(\mathcal{U})]$ (resp. $k \in [1, \text{Card}(\mathcal{X})]$ et $l \in [1, \text{Card}(\mathcal{Y})]$). On retrouve ainsi des notations semblables à celles de l’automatique classique.

« Bonnes » propriétés

Certaines propriétés des RdP dépendent de leurs marquages initiaux. Elles sont en général regroupées sous le nom générique de « bonnes propriétés ». Ainsi le graphe des marquages accessibles d’un RdP fournit des indications essentielles sur ses propriétés, et donc sur le fonctionnement du système qu’il représente.

Définition 36 (Bornitude). *Une place $p \in \mathcal{P}$ d’un réseau de Petri marqué $\mathcal{P} = (\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$ est dite k -bornée (avec $k \in \mathbb{N}$) si pour tout marquage accessible $\mathcal{M} \in A(\mathcal{P})$, le marquage de cette place vérifie $\mathcal{M}(p) \leq k$. Dans le cas contraire, nous dirons que p est non bornée. Enfin, si p est 1-bornée, elle est dite binaire (“safe” en anglais).*

Quand toutes les places d’un RdP sont binaires, ce dernier est dit sauf.

Si l'on considère le RdP de la figure 2.1, on voit que, pour le marquage initial \mathcal{M}_0 , les places p_1 , p_2 et p_3 sont binaires. Ce RdP est donc sauf.

Lorsqu'un RdP modélise un système manufacturier, certaines places représentent des convoyeurs ou bien des zones de stockage intermédiaires. La bornitude du marquage du modèle est alors synonyme de limitation de la taille des stocks internes du système. Cette bornitude reflète alors, en quelque sorte, une propriété de « stabilité » du système de production modélisé.

Définition 37 (Vivacité). *Une transition $t \in \mathcal{T}$ d'un réseau de Petri marqué $\mathcal{P} = (\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$ est vivante si pour tout marquage \mathcal{M} accessible depuis \mathcal{M}_0 , il existe une suite de transitions s , comportant au moins une fois la transition t , et telle que s soit franchissable pour \mathcal{M} .*

Un RdP marqué \mathcal{P} est dit vivant si toutes ses transitions sont vivantes. Concrètement, cela signifie qu'une transition vivante pourra toujours être tirée, après quelle séquence de franchissements.

La non vivacité révèle souvent un problème de conception du système modélisé ; elle montre qu'une partie du système n'est, à partir d'un état donné, plus sensible aux événements externes.

L'attribution de ces propriétés implique des considérations sur l'ensemble des marquages accessibles à partir du marquage initial. Ainsi, il n'est pas possible de les détecter à l'aide d'algorithmes efficaces dans la pratique, car l'ensemble des marquages accessibles n'est pas toujours fini, sauf pour quelques sous-classes restreintes de réseaux de Petri telles que les graphes d'états. Nous allons présenter ces sous-classes dans la section suivante.

2.1.2 Les principales sous-classes de réseaux de Petri

Nous ne considérons pas dans nos travaux le cas de graphes valués, où une pondération est parfois attachée aux arcs ; sauf indication contraire, les valuations des arcs seront toujours considérées égales à 1. Dans la suite de cette thèse, notre intérêt se portera plus particulièrement sur la sous classe des graphes d'événements ; c'est pourquoi nous détaillons les propriétés de cette sous-classe, notamment ce qui concerne la gestion du temps.

Formes spécifiques de RdP

On présente trois sous-classes bien connues de RdP.

Définition 38 (Graphe d'événements). *Un graphe d'événements est un réseau de Petri tel que chaque place a exactement un arc entrant et un arc sortant.*

Notons que les graphes d'événements ne permettent pas de modéliser les situations de conflit ou de partage de ressources, telles que celles illustrées par les figures 2.4 (a) et 2.4 (b). Les graphes d'événements sont des systèmes purement déterministes, dans lesquels les tirs des transitions ne nécessitent pas de décision. Malgré ces hypothèses limitatives, cette sous-classe de RdP est intéressante pour de nombreuses applications où l'on doit essentiellement modéliser des contraintes de synchronisation entre plusieurs processus (voir les figures 2.4 (c) et 2.4 (d)).

Définition 39 (Graphes d'états). *Un graphe d'états est un réseau de Petri pour lequel chaque transition a exactement un arc entrant et un arc sortant.*

À l'inverse des graphes d'événements, les graphes d'état permettent de modéliser les structures de choix ou les phénomènes de concurrence, mais pas les phénomènes de synchronisation. Ils modélisent de manière adéquate les automates à états finis, par exemple.

Définition 40 (Réseaux de Petri à choix libres). *Un réseau de Petri à choix libres (RCL) est un réseau de Petri tel que si deux transitions partagent la même place en amont, ils ne possèdent pas d'autre place amont.*

Les réseaux de Petri à choix libres autorisent la modélisation des différents phénomènes de synchronisation et de concurrence au sein d'un même réseau de Petri. Leur définition spécifie néanmoins que ces deux types de phénomènes ne peuvent pas être modélisés conjointement, comme pour la configuration de la figure 2.5. Ainsi, dès qu'une place possède plusieurs transitions en aval, toutes ces transitions sont soit franchissables, soit non franchissables. On peut donc choisir librement, c'est-à-dire indépendamment du reste du réseau, celle qui sera franchie. On retiendra donc que les RCL permettent de modéliser des systèmes pour lesquels les synchronisations et les conflits sont disjoints.

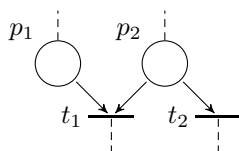


FIG. 2.5 – Exemple de configuration interdite dans un RCL

Notons enfin que tout graphe d'états, ainsi que tout graphe d'événements, est par définition un réseau de Petri à choix libres.

Propriétés des graphes d'événements

Nous présentons les propriétés de bornitude et de vivacité s'appliquant à des graphes d'événements.

Théorème 13 (Bornitude des circuits d'un graphe d'événement). *Dans un graphe d'événements, le nombre de jetons d'un circuit élémentaire est constant.*

Démonstration : Rappelons qu'un circuit élémentaire d'un graphe est un chemin qui commence et se termine au même sommet et qui ne passe pas deux fois par le même sommet. Si une transition franchissable appartenant à un circuit élémentaire est franchie, son franchissement prend un jeton dans une des places du circuit pour le remettre immédiatement dans une place aval du circuit. L'opération de franchissement d'une transition d'un circuit laisse donc invariant le nombre de jetons dans ce circuit. \square

Théorème 14 (Vivacité d'un graphe d'événement). *Soit \mathcal{R} un graphe d'événements et \mathcal{M}_0 son marquage initial, alors le graphe marqué $(\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$ est vivant si et seulement si tout circuit élémentaire contient une place initialement marquée.*

Démonstration : Supposons qu'un circuit élémentaire d'un graphe d'événements ne contienne pas de place initialement marquée. D'après le théorème 13, ce circuit ne contiendra jamais de jeton et donc toutes ses transitions sont en permanence non franchissables : le graphe d'événements n'est donc pas vivant.

Inversement, dans un graphe d'événements non vivant, une transition morte (qui n'est jamais tirable) possède obligatoirement en amont une transition également morte. En « remontant » ainsi d'une transition morte à une autre située en amont, on aboutit inéluctablement à une transition appartenant à un circuit, qui est donc nécessairement sans jeton. Par l'absurde, nous venons de prouver ce théorème. \square

Remarque 20. *Les graphes d'événements considérés seront dorénavant systématiquement vivants.*

L'approche que nous proposons pour permettre la modélisation de conflits par des graphes d'événements est basée sur l'introduction de contraintes temporelles. Nous allons donc présenter comment introduire l'écoulement du temps dans les graphes d'événements.

Aspects temporels

Ramchandani, dans sa thèse de 1974, a été le premier à introduire le concept de temporisation dans les RdP [Ram74]. Par cette contribution, on a pu étudier certaines propriétés quantitatives des systèmes, basées sur l'écoulement du temps. L'étude de la dynamique des systèmes synchronisés s'effectue par réseaux de Petri dits « temporisés ». Dans les systèmes réels, l'immobilisation d'une pièce dans un magasin ou le trajet d'un train entre deux correspondances nécessitent une durée minimale. Le temps de séjour (minimal) d'un jeton dans une place du réseau est ainsi affecté d'une durée.

Définition 41 (Graphe d'événement temporisé). *Un graphe d'événements est dit temporisé (GET) si à chaque place $p \in \mathcal{P}$ est associée un temps $\mathcal{T}(p)$, où $\mathcal{T} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application qui à toute place associe sa temporisation. Cette dernière est interprétée comme la durée minimale de séjour d'un jeton dans la place p correspondante. On supposera instantanés les tirs des transitions⁷.*

Exemple 13. *Les temporisations associées aux places correspondent aux durées de différentes activités. Ainsi, le GET de la figure 2.6 peut représenter une cellule de production se comportant comme suit : 3 éléments d'en-cours peuvent être traités en même temps et ce traitement prend systématiquement (au moins) 4 unités de temps pour chaque produit. Si le poste de travail n'est pas disponible, les en-cours restent dans le stock amont, appelé S_{amont} . Quand une opération est terminée, l'élément réalisé correspondant est placé dans le stock aval, appelé S_{aval} ⁸, et le poste de travail redevient disponible (un jeton revient en C), en attendant l'arrivée d'un nouveau produit.*

7. on pourrait aussi associer à chaque transition une temporisation – exprimant la durée minimale d'activation d'une transition, mais il a été montré (entre autres, dans [Mur89]) qu'il est toujours possible de se ramener au cas où seules les places sont temporisées

8. S_{amont} et S_{aval} possèdent tous les deux une capacité supposée infinie. Les deux places correspondantes sont donc non bornées

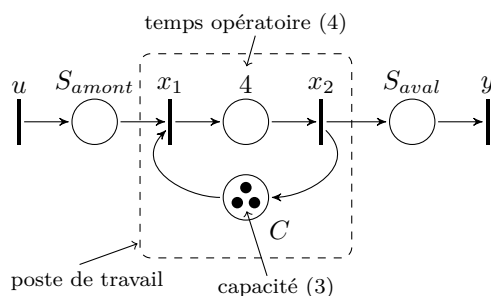


FIG. 2.6 – Modèle GET d'un poste de travail

Remarque 21. *Il faut bien sûr garder à l'esprit que les GET ne font que capturer la dynamique et la logique d'un système donné. Ils ne sont pas faits pour rigoureusement représenter la partie physique d'un système. Ainsi, toutes les places ne correspondent pas directement à un endroit physique et réel où circulent des produits. En effet, dans l'exemple de la figure 2.6, on peut aisément interpréter certains jetons comme des produits évoluant dans le système sous forme de flux, alors que d'autres représentent seulement des paramètres du système (comme la capacité du poste de travail par exemple).*

Par ailleurs, dans un GET, plusieurs arcs se synchronisent au niveau d'une transition en amont d'un poste de travail pour chaque type de produit et de ressource nécessaire à la réalisation de l'activité de ce poste. Cette sémantique est bien souvent la plus proche de la réalité. Cependant, on pourrait aussi considérer un GET dont la sémantique des jetons serait des ressources se déplaçant vers le produit (et non l'inverse), comme pour la construction d'un bateau par exemple.

Même si la sous-classe des graphes d'événements temporisés consiste en une restriction du pouvoir de modélisation, elle est largement utilisée pour modéliser les systèmes pour lesquels les ordonnancements sont réglés à l'avance. Sa première utilisation en association à la théorie des diodes remonte aux années 80, dans les travaux de Cohen et al. [CDQV85b]. Les GET ont fait l'unanimité par la suite [CMQV89, Gau92, BCOQ92] jusqu'à nos jours⁹. Une des motivations majeures pour l'utilisation d'un tel formalisme est la possibilité d'utiliser sans restriction toutes les contributions de la théorie des diodes, comme nous le verrons dans la section 2.2. Mais avant cela, nous allons aborder les GET possédant des incertitudes temporelles, liées à l'utilisation d'intervalles de comportement.

GET avec incertitudes temporelles

Les systèmes complexes que nous considérons sont souvent incertains. On s'intéresse en particulier au cas où les incertitudes portent sur les temporisations d'un graphe d'événements. Nous avons vu (dans la section 1.3.2) que ces dernières peuvent être modélisées dans un diode d'intervalles. Il convient donc de présenter comment des relations formulées dans une telle structure algébrique peuvent être transposées sous forme de GET avec incertitudes temporelles et vice-versa.

⁹. voir l'annexe B.1 à ce propos

Des temporisations, non plus constantes, mais sous forme d'intervalles, représentent les bornes inférieure et supérieure des temps de séjour *minimaux* possibles pour chaque jeton dans une place, avant de pouvoir contribuer au tir d'une transition aval. Il y a une différence de sémantique fondamentale entre les intervalles que nous manipulons et les intervalles de temps d'un RdP temporel, en particulier pour des sémantiques mono-serveur où les temporisations sont situées sur les transitions [Mer74] ou sur les places [Kha97]. Dans notre cas, cet intervalle correspond à des bornes pour garantir le comportement du système modélisé, compte tenu d'incertitudes temporelles. La temporisation qui correspondra à l'attente minimale de séjour pour chaque jeton sera déterminée dynamiquement et aura pour valeur un des éléments de cet intervalle¹⁰. Par conséquent, on utilise une sémantique « infinité de serveurs ». Cet intervalle n'est pas la fenêtre de temps dans laquelle un tir de transition est possible, et dans laquelle *seulement* les jetons des places aval correspondantes pourraient être consommés. Ainsi, dans le cadre des GET avec incertitudes temporelles que nous utilisons, un jeton ne meurt pas quand la borne supérieure de l'intervalle de temps de la place où il se situe est atteinte, à la différence des RdP temporels où les temps représentent une contrainte de fonctionnement.

Nous allons voir précisément en quoi la sémantique de ces réseaux de Petri est clairement différente de celle des RdP temporels.

Exemple 14. *On considère une sémantique « infinité de serveurs » (chaque jeton possède donc sa propre horloge). Prenons comme exemple le GET minimal suivant.*

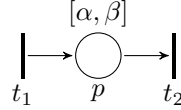


FIG. 2.7 – GET avec incertitudes temporelles minimal

Chaque jeton de p devra attendre un temps compris entre α et β avant de pouvoir contribuer au tir de la transition t_2 . Par ailleurs, chacun des jetons issus du tir de la transition t_1 aura une temporisation qui lui est propre. Ainsi, toute transition t sensibilisée possédant des places amont avec incertitudes temporelles ne sera pas tirable tant que toutes les bornes inférieures des intervalles d'incertitudes des différentes temporisations des places amont ne seront pas atteintes. De plus, une telle transition t sera nécessairement tirée dès que toutes les bornes supérieures des intervalles d'incertitudes des différentes temporisations des places amont seront atteintes. Bien entendu, si elle n'est pas sensibilisée, les jetons peuvent rester indéfiniment, comme dans tout GET.

Définition 42 (Sémantique formelle des GET avec incertitudes temporelles). *Il est possible de décrire formellement la sémantique des GET avec incertitudes temporelles via un système de transitions d'état. En s'inspirant des notations présentées dans [BR08], soient $\nu(\text{jeton})$ la valuation de l'horloge associée à un jeton présent dans une place du RdP et \mathcal{M} le marquage de ce RdP. (\mathcal{M}, ν) peut*

¹⁰. comme des variables aléatoires dont on ne connaît a priori que les intervalles de valeurs, en quelque sorte

donc être considéré comme un état du système. On définit les relations $\text{Amont}(t)$ et $\text{Sensib}(\mathcal{M}, t)$ qui renvoient respectivement l'ensemble des places amont d'une transition t et un booléen indiquant si t est sensibilisée par \mathcal{M} . Les relations $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ renvoient respectivement la borne inférieure ou supérieure de la temporisation d'une place p . Seules les deux relations de transition suivantes sont possibles :

$$(\mathcal{M}, \nu) \xrightarrow{t} (\mathcal{M}', \nu) \iff \begin{cases} \forall p \in P, \mathcal{M}'(p) = \mathcal{M}(p) - \text{Pré}(p, t) + \text{Post}(p, t) \\ \text{Sensib}(\mathcal{M}, t) \text{ est vraie} \\ \forall p \in \text{Amont}(t), \forall \text{jeton} \in \mathcal{M}(p), \nu(\text{jeton}) \geq \alpha(p) \end{cases}.$$

En d'autres termes, avant de pouvoir tirer la transition t , il faut au moins attendre les bornes inférieures de chacun des intervalles des places dont les jetons sensibilisent cette transition.

$$(\mathcal{M}, \nu) \xrightarrow{d} (\mathcal{M}, \nu') \iff \begin{cases} \nu' = \nu + d \\ \nexists t \in \mathcal{T} \text{ avec } \text{Sensib}(\mathcal{M}, t) \text{ telle que} \\ \quad \forall p \in \text{Amont}(t), \exists \text{jeton} \in \mathcal{M}(p), \nu(\text{jeton}) \geq \beta(p) \end{cases}.$$

C'est-à-dire qu'une transition t pour laquelle toutes les valuations des horloges des jetons des places amont la sensibilisant ont atteint les bornes supérieures des temporisations de ces places doit être tirée sur le champ ; le temps n'a plus le droit de s'écouler. Concrètement, on peut uniquement utiliser la première relation de transition exprimée ci-dessus, et donc tirer la transition t . Dans les autres cas, le temps peut ou doit s'écouler en fonction des valuations des horloges des jetons du RdP. On retrouve bien la sémantique classique de tir « au plus tôt », telle que rappelée dans l'annexe A.1.3.

Exemple 15. La figure 2.8 représente le même type de systèmes que celui de la figure 2.6, mais les temporisations sont cette fois-ci incertaines. Le temps opératoire peut désormais varier entre au minimum 2 et au maximum 5 unités de temps en fonction des produits à réaliser¹¹. Par ailleurs, il peut être nécessaire de reconfigurer la machine située sur le poste de travail (comme par exemple changer ses outils), ce qui entraîne un délai éventuel d'une unité de temps avant que celle-ci ne redevienne disponible.

Nous allons voir dans la section suivante comment utiliser les GET pour l'étude des systèmes industriels manufacturiers, afin d'en tirer une modélisation algébrique dans un dioïde. Le cas particulier des GET avec incertitudes temporelles ne sera abordé que dans la section 2.2.3, puisqu'il suffira de considérer les résultats présentés jusqu'à cette section-là valables pour les bornes des intervalles utilisés.

2.2 Théorie des systèmes linéaires

Nous avons abordé dans la section précédente la représentation graphique des réseaux de Petri, permettant la modélisation et l'étude de SED. Ces systèmes sont communément considérés via leurs comportements entrée-sortie. Ces

¹¹. ce qui n'empêche pas un produit fini de pouvoir éventuellement rester indéfiniment au niveau du poste de travail une fois ce temps écoulé, si le stock aval est plein, par exemple

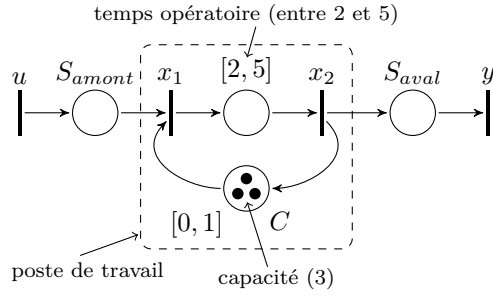


FIG. 2.8 – Modèle GET d'un poste de travail avec incertitudes temporelles

comportements sont la suite des différents états stables par lesquels évoluent les systèmes à la suite d'événements ordonnés dans le temps. Nous allons voir en premier lieu comment dater et/ou compter ces événements. Cette manière d'aborder les événements permettra ensuite de définir un comportement entrée-sortie des systèmes étudiés, que l'on appellera réponse impulsionnelle, en référence à la théorie des signaux. Pour finir, nous proposerons une manière classique de transposer une réponse impulsionnelle en une fonction de transfert, généralement en une indéterminée.

2.2.1 Représentation d'état

Nous avons vu que plusieurs représentations algébriques sont possibles pour les systèmes à événements discrets (comme ceux décrits par les figures 2.6 et 2.8). En général, la variation de l'état d'un réseau de Petri correspond aux variations de son marquage noté $\Delta\mathcal{M}$ (qui est le produit de matrice d'incidence W par un vecteur de tirs de transition \vec{S}). Dans ce contexte, on manipule des équations de la forme $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \Delta\mathcal{M}$; c'est le modèle le plus courant [Mur89].

En se référant au système représenté par la figure 2.6, ces marquages correspondent à deux états possibles pour le poste de travail : libre ou occupé.

Mais la représentation d'état liée au marquage ne permet pas de discuter quantitativement des performances des systèmes temporisés étudiés (dont leurs régimes transitoires, leurs régimes permanents ou leurs temps de cycle). Il est nécessaire de considérer pour cela les franchissements des transitions (en les datant et en les comptant). Cette manière de quantifier les performances, en se basant sur des dateurs et des compteurs à été proposée pour la première fois dans [CDQV85a].

Dateurs et compteurs

Cette autre représentation des états n'est plus liée aux places, mais aux différentes transitions des GET. Nous devons donc introduire deux nouvelles applications croissantes, dont les images prennent leurs valeurs dans des ensembles correspondant aux diodes, présentés dans le chapitre précédent.

Notation 5 (Applications dateur et compteur [CMQV86]). *Pour chaque transition $t_i \in \mathcal{T}$ d'un GET, on peut associer une application dateur et une application compteur, respectivement définies de la manière suivante :*

- $t_i(k) : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_{\max}$: date à laquelle se produit la k^e activation de la transition t_i .
- $\widehat{t}_i(t) : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_{\min}$: nombre de tirs de la transition t_i ayant eu lieu jusqu'à la date t .

En interprétant les GET étudiés comme des représentations graphiques de systèmes (de production), on peut désormais compter et dater les événements y survenant (principalement la détection du passage d'un produit devant un capteur).

Les hypothèses de fonctionnement des GET que nous étudions, ainsi que leurs modélisations dans les dioïdes sont présentées dans l'annexe A.1.

Forme récurrente explicite

Les SdP réalisent des productions de manière cyclique, ce qui se modélise justement à l'aide d'un réseau de Petri contenant un ou plusieurs cycles. Prenons celui de la figure 2.9¹² et cherchons à modéliser son état.

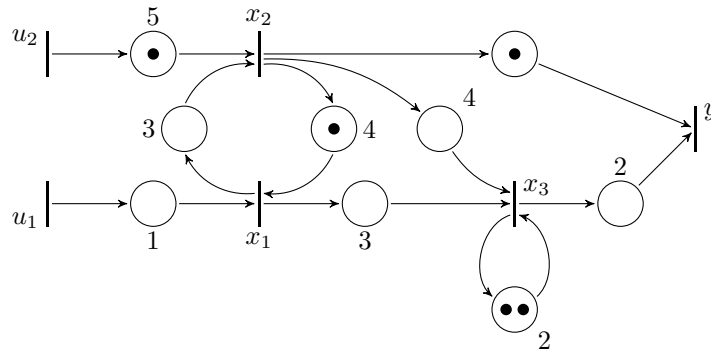


FIG. 2.9 – GET à deux entrées et une sortie (de type MISO)

En tenant compte des jetons initialement présents dans les places du GET de la figure 2.9, ainsi que des temporisations associées à l'ensemble de ses places, on obtient le système suivant dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$:

$$\begin{cases} x_1(k) = 4 \otimes x_2(k-1) \oplus 1 \otimes u_1(k) \\ x_2(k) = 3 \otimes x_1(k) \oplus 5 \otimes u_2(k-1) \\ x_3(k) = 3 \otimes x_1(k) \oplus 4 \otimes x_2(k) \oplus 2 \otimes x_3(k-2) \\ y(k) = x_2(k-1) \oplus 2 \otimes x_3(k) \end{cases}$$

ou encore, de façon matricielle :

12. inspiré de celui présenté dans l'article [CMQV84]

$$\left\{ \begin{array}{l} X(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & 4 & \varepsilon \end{pmatrix} X(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} X(k-1) \oplus \\ \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{pmatrix} X(k-2) \oplus \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} U(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} U(k-1) \\ y(k) = (\varepsilon \quad \varepsilon \quad 2) X(k) \oplus (\varepsilon \quad e \quad \varepsilon) X(k-1) \end{array} \right.,$$

avec $X(k) = (x_1(k) \quad x_2(k) \quad x_3(k))^T$ et $U(k) = (u_1(k) \quad u_2(k))^T$.

On trouve donc un système d'équations de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(k) = A_0 X(k) \oplus A_1 X(k-1) \oplus A_2 X(k-2) \oplus B_0 U(k) \oplus B_1 U(k-1) \\ y(k) = C_0 X(k) \oplus C_1 X(k-1) \end{array} \right.$$

Notons $\mathcal{M}_0(p)$ le marquage initial de toute place $p \in \mathcal{P}$. D'une manière générale, en posant $M = \max_{p \in \mathcal{P}}(\mathcal{M}_0(p))$ et $T = \max_{p \in \mathcal{P}}(\mathcal{T}(p))$, on peut récrire le système précédent sous l'une des deux formes suivantes :

$$\text{dans } \overline{\mathbb{Z}}_{\max} : \left\{ \begin{array}{l} X(k) = \bigoplus_{i=0}^M A_i X(k-i) \oplus \bigoplus_{i=0}^M B_i U(k-i) \\ Y(k) = \bigoplus_{i=0}^M C_i X(k-i) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (2.2)$$

$$\text{dans } \overline{\mathbb{Z}}_{\min} : \left\{ \begin{array}{l} X(t) = \bigoplus_{i=0}^T A_i X(t-i) \oplus \bigoplus_{i=0}^T B_i U(t-i) \\ Y(t) = \bigoplus_{i=0}^T C_i X(t-i) \end{array} \right. . \quad (2.3)$$

en représentation dateurs et compteurs respectivement¹³.

Les systèmes d'équations (2.2) ou (2.3) sont des formes implicites, qui permettent de caractériser des SED modélisés par des graphes d'événements temporisés. On préférera cependant manipuler des systèmes d'équations explicites. On étudiera donc ces SED par le biais de GET dont les comportements sont équivalents, mais où les matrices A_i sont nulles pour $i \neq 1$ et les matrices B_i et C_i sont nulles pour $i > 0$. Ceci se réalise en introduisant des transitions intermédiaires, qui seront prises en compte au moyen de l'extension des vecteurs d'état $X(k)$ et $X(t)$. Ces nouveaux vecteurs d'état, notés $\hat{X}(k)$ et $\hat{X}(t)$, incluent les applications dateur et compteur liées à des transitions qui ont été ajoutées au GET initial. On obtient donc les formes récurrentes explicites suivantes :

$$\text{dans } \overline{\mathbb{Z}}_{\max} : \left\{ \begin{array}{l} \hat{X}(k) = A \hat{X}(k-1) \oplus B U(k) \\ Y(k) = C \hat{X}(k) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (2.4a)$$

$$(2.4b)$$

13. ces systèmes sont parfois dits être sous une forme ARMA [Coh95, Cot99, Lho03] – pour « Auto-Régressif à Moyenne Ajustée », ou “Auto Regressive - Moving Average” en anglais

$$\text{dans } \overline{\mathbb{Z}}_{\min} : \begin{cases} \widehat{X}(t) = A\widehat{X}(t-1) \oplus BU(t) \\ Y(t) = C\widehat{X}(t) \end{cases} \quad (2.5a)$$

$$(2.5b)$$

Par analogie avec la théorie des systèmes dynamiques linéaires, les équations matricielles (2.4a) et (2.5a) sont des équations d'état et les équations (2.4b) et (2.5b) sont des équations d'observation. De même, \widehat{X} est considéré comme le vecteur d'état, U est le vecteur d'entrée ou de commande et Y est le vecteur de sortie ou d'observation du système. Enfin les matrices A , B et C sont respectivement appelées matrice d'état ou matrice dynamique, matrice d'entrée ou de commande et matrice de sortie ou d'observation.

Afin d'obtenir les équations d'état et d'observation présentées précédemment, il est nécessaire d'introduire un certain nombre de transitions, liées au marquage initial du GET étudié. Ces ajouts doivent permettre de satisfaire les trois contraintes suivantes :

1. Aucune place située entre deux transitions internes (dans \mathcal{X}) ne doit contenir plus d'un jeton.
2. Toutes les places situées entre une transition source (dans \mathcal{U}) et une transition interne doivent être sans jeton.
3. Toutes les places situées entre une transition interne et une transition puits (dans \mathcal{Y}) doivent être sans jeton.

Exemple 16. La figure 2.10 représente un GET dont le comportement entrée-sortie est équivalent à celui de la figure 2.9. En introduisant les transitions intermédiaires ξ_i , on aboutit à la représentation d'état (2.6) dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$, en considérant cette fois-ci le vecteur d'état augmenté $\widehat{X}(k)$ avec

$$\widehat{X}(k) = (\xi_1(k) \quad x_1(k) \quad x_2(k) \quad \xi_2(k) \quad x_3(k) \quad \xi_3(k))^T.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{X}(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \mathbf{3} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \widehat{X}(k) \oplus \\ \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \mathbf{4} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \mathbf{5} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mathbf{2} & \varepsilon \end{pmatrix} \widehat{X}(k-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & e \\ \mathbf{1} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} U(k) \\ Y(k) = (\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e \quad \mathbf{2} \quad \varepsilon) \widehat{X}(k) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Pour obtenir la forme récurrente explicite du système (2.4), il suffit de supprimer la partie implicite de la première équation du système (2.6), à l'aide du corollaire 1 concernant la résolution d'équations linéaires de la forme $x = a \otimes x \oplus b$ (présenté dans la section 1.2.2, page 26). Moyennant l'existence de

A_0^* ¹⁴, la plus petite solution $X'(k)$ de l'équation (2.6) s'écrit :

$$X'(k) = A_0 X'(k) \oplus A_1 X'(k-1) \oplus B_0 U(k) \quad (2.7)$$

$$= A_0^* (A_1 X'(k-1) \oplus B_0 U(k)) \quad (2.8)$$

$$= A_0^* A_1 X'(k-1) \oplus A_0^* B_0 U(k) \quad (2.9)$$

Rappelons que $A_0^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_0^i$. La forme récurrente explicite de ce GET est donc :

$$\begin{cases} X'(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & \varepsilon & 11 & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \end{pmatrix} X'(k-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & e \\ 1 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ 8 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} U(k) \\ Y(k) = (\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e \quad 2 \quad \varepsilon) X'(k) \end{cases} \quad (2.10)$$

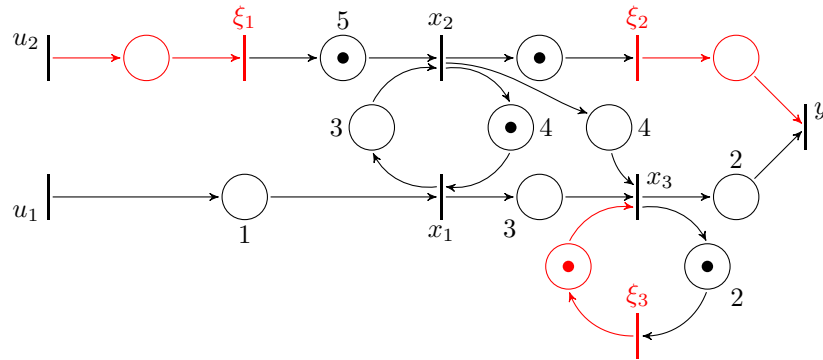


FIG. 2.10 – GET à deux entrées et une sortie, dont le vecteur d'état a été augmenté (ajouts en rouge)

Le système (2.10) correspond à l'évolution de l'état du GET de la figure 2.10 en fonctionnement au plus tôt. Ainsi, à partir de la donnée de la suite des vecteurs de commande $U(1), U(2), \dots$ et de l'état initial $\hat{X}(0)$, l'équation (2.9) permet de déterminer successivement toutes les valeurs $\hat{X}(1), \hat{X}(2), \dots$ du vecteur d'état. En somme, à partir d'une loi d'entrée ou de commande donnée et d'un état initial, on peut connaître à l'avance l'évolution dans le temps du système, qualifié à juste titre de déterministe.

Il est aussi possible de déterminer simplement la cadence d'un système (de production) par la seule donnée de sa matrice d'état. En effet, comme présenté en annexe A.3.1, la valeur propre de cette matrice est égale à la cadence de production du système. On trouve que cette valeur propre est très exactement le rayon spectral de la matrice d'état. Il existe différents algorithmes permettant de calculer cette valeur de manière efficace et l'algorithme de Karp [Kar78] est celui qui présente encore de nos jours le plus d'avantages (cf. l'annexe B.2).

14. c'est-à-dire en supposant que le graphe de précédence associé à cette matrice ne comporte pas de circuit positif, cf. la définition 69, à la page 143

Le cas plus complexe présentant des temporisations incertaines sera présenté dans la section 2.2.3, après avoir introduit les notions de représentation entrée-sortie, et de transfert d'un système.

2.2.2 Représentation entrée-sortie de SED dans un dioïde

Les différentes modélisations que nous développons dans les chapitres suivants s'appuient essentiellement sur une représentation entrée-sortie des systèmes. Nous allons voir que cette représentation correspond à la notion de réponse impulsionnelle issue de la théorie des signaux.

Dans la section 2.2.1, nous avons étudié les systèmes via leur « descriptions internes ». Ces variables d'état internes (dateurs ou compteurs) étaient liées les unes aux autres via des équations. Cherchons à caractériser les sorties en une fonction des entrées. La forme récurrente explicite (2.4), peut être développée comme suit :

$$\begin{aligned}
 Y(k) &= C\hat{X}(k) \\
 &= CA\hat{X}(k-1) \oplus CBU(k) \\
 &= CA^2\hat{X}(k-2) \oplus CABU(k-1) \oplus CBU(k) \\
 &= \dots \\
 &= CA^n\hat{X}(k-n) \oplus \bigoplus_{i=0}^{n-1} CA^iBU(k-i).
 \end{aligned}$$

En considérant les conditions initiales canoniques définies dans la section A.1.1¹⁵, il est possible de récrire le comportement entrée-sortie d'un GET de la manière suivante :

$$Y(k) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H(i) \otimes U(k-i), \text{ avec } H(i) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } i < 0, \\ CA^iB & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Remarque 22 (Interprétation des coefficients de $H(k)$ [Cot99]). *Il est possible de donner une interprétation des termes de la matrice $H \in (\mathbb{Z}_{\max})^{n \times m}$, où n et m sont respectivement le nombre d'entrées et de sorties. L'élément $H_{ij}(k)$ est la date du k^e tir de la sortie Y_j en fonction de l'entrée U_i du type :*

$$U_i(k) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k < 0, \\ e & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une telle entrée correspond au tir d'une infinité de jetons à la date 0. L'élément $H_{ij}(k)$ est donc la réponse impulsionnelle correspondante pour le système (cf. la section A.2.2). En conséquence, les applications compteurs et dateurs peuvent parfaitement être considérées comme des signaux.

Remarque 23. *On constate aussi que le comportement entrée-sortie d'un GET, régi par la relation de l'équation (2.11) correspond à une convolution de signaux¹⁶, ou plus exactement une sup-convolution comme on situe nos calculs*

15. ce qui nous donne, par convention, $\hat{X}(x) = \varepsilon$ et $U(x) = \varepsilon$ pour $x < 0$. Ainsi, pour un k donné et en considérant p assez grand, il est aisé de voir que certains termes de cette équation sont nuls, au sens du dioïde \mathbb{Z}_{\max}

16. cf. la définition 61, de l'annexe A.2

dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$. On peut ainsi utiliser la notation suivante :

$$Y(k) = (H * U)(k).$$

L'analogie avec la relation entrée-sortie d'un système linéaire continu (A.12) est alors évidente.

Il existe une autre forme de produit entre applications compteurs ou dateurs appelée « produit de Hadamard » [Gau93] et notée \odot . Dans un souci de généralité, nous allons considérer des applications dans un ensemble quelconque de signaux noté $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$ (cf. l'annexe A.2).

Définition 43 (Produit de Hadamard). *Le produit \odot de signaux de $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$ est défini par*

$$\forall t \in \mathcal{D}, (f \odot g)(t) \triangleq f(t) \otimes g(t).$$

Cet opérateur possède quelques propriétés que nous détaillons ci-dessous.

Propriété 1 (Associativité de \odot). *Soient les signaux a, b et c définis dans $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$. On a la relation suivante :*

$$(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c).$$

Démonstration : Par définition de \odot , on a $\forall t \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} ((a \odot b) \odot c)(t) &= (a \odot b)(t) \otimes c(t) \\ &= (a(t) \otimes b(t)) \otimes c(t) \\ &= a(t) \otimes (b(t) \otimes c(t)) \quad \text{car } \otimes \text{ est associatif} \\ &= a(t) \otimes (b \odot c)(t) \\ &= (a \odot (b \odot c))(t) \end{aligned}$$

□

Propriété 2 (Distributivité de \odot sur la loi \oplus). *Soient les signaux a, b et $c \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$. On a la relation suivante :*

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c).$$

Démonstration : Par définition de \odot , on a $\forall t \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} (a \odot (b \oplus c))(t) &= a(t) \otimes (b \oplus c)(t) \\ &= (a(t) \otimes b(t)) \oplus (a(t) \otimes c(t)) \quad \text{par distributivité de } \otimes \text{ sur } \oplus \\ &= (a \odot b)(t) \oplus (a \odot c)(t) \\ &= ((a \odot b) \oplus (a \odot c))(t) \end{aligned}$$

□

Propriété 3. *L'application $x \mapsto a \odot x$ est isotone, c'est-à-dire $\forall a, b, c \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$,*

$$b \preceq c \Rightarrow a \odot b \preceq a \odot c.$$

Démonstration : La loi \otimes étant isotone, nous pouvons affirmer, $\forall t \in \mathbb{Z}$, que :

$$\begin{aligned} b(t) \preceq c(t) &\Rightarrow a(t) \otimes b(t) \preceq a(t) \otimes c(t) && \text{par isotonie de } \otimes \\ &\Rightarrow (a \odot b)(t) \preceq (a \odot c)(t) && \text{par définition de } \odot \end{aligned}$$

□

2.2.3 Fonctions et matrices de transfert d'un SED dans un dioïde

Nous avons vu dans la section 2.2.2 que des systèmes de production pouvaient être représentés par des réponses impulsionnelles. Par analogie avec la théorie conventionnelle des signaux en temps discret, il est aussi possible de représenter ces systèmes par des réponses « en fréquence » [CMQV84]. Ces dernières peuvent être obtenues à l'aide de transformées, analogues aux transformées en z (utilisée pour discrétiser les systèmes continus). Les signaux et systèmes sont alors représentés par des séries formelles, définies dans une structure algébrique de dioïde (cf. la section 1.3.1). Une série intègre tout le comportement du système correspondant (toute sa capacité de production) et permet de présenter de manière explicite le caractère périodique de ce dernier, comme nous le verrons en fin de section.

En particulier, les applications dateur et compteur peuvent respectivement subir des transformées appelées γ et δ . La propriété la plus remarquable de ces transformées est de changer les sup- ou inf-convolutions entre signaux, présentées précédemment, en des produits de séries formelles correspondantes.

Sur les séries formelles

Pour un signal donné $s \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$, on définit une série formelle s en l'indéterminée z par la formule suivante :

$$s(z) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} s(n) z^n \quad (2.12)$$

Ces transformées sont maintenant classiques dans la littérature sur les dioïdes [CMQV86, BCOQ92] et sont utilisées de manière quasi-systématique de nos jours.

Montrons que le produit de convolution de deux signaux est transformé en un produit des séries formelles correspondantes :

$$\begin{aligned} \forall u, v \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} (u \otimes v)(t) z^t &= \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} u(t-s) v(s) z^t && \text{(par définition)} \\ &= \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} u(t') v(s) z^{t'+s} && \text{(en posant } t' = t - s) \\ &= \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} u(t') z^{t'} \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} v(s) z^s \\ &= u(z) v(z). \end{aligned}$$

En reprenant la notation 8 concernant l'expression de la sortie d'un système stationnaire comme le produit de convolution de sa réponse impulsionnelle et de

son signal d'entrée, on obtient la transformée suivante pour cette même relation d'entrée-sortie :

$$y(z) = h(z)u(z), \quad (2.13)$$

où $h(z)$ est la série, ou fonction, de transfert du système et $u(z)$ est la série d'entrée. Ces séries sont définies dans le dioïde $\mathcal{D}[[z]]$ en l'indéterminée z

On se rend compte, d'après la relation 2.12, que le produit d'un dioïde de séries $\mathcal{D}[[z]]$ n'est rien d'autre qu'un produit de convolution. Il est parfois appelé produit « de Cauchy » [Gau93]. Cet autre produit qu'est celui dit « de Hadamard » peut aussi être défini pour les séries formelles [Fli72].

Définition 44 (Produit de Hadamard de séries formelles). *Le produit de Hadamard de séries formelles, noté \odot , correspond au produit point à point des coefficients des différents monômes de deux séries sur lesquelles on réalise cette opération. Plus formellement,*

$$F(x) \odot G(x) \triangleq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}^p} [f(k) \otimes g(k)] x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}.$$

Transformées en γ et en δ

Rappelons qu'un dateur est assimilé à une fonction croissante de \mathbb{Z} dans le dioïde complet $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$.

Définition 45. *La transformée en l'indéterminée γ d'un dateur d est définie comme la série formelle*

$$d(\gamma) \triangleq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \gamma^k.$$

Le monôme $d(k) \gamma^k$ s'interprète comme le postulat suivant : l'événement k a lieu *au plus tôt* à la date $d(k)$. On peut donc voir la série $d(\gamma)$ comme une somme d'informations sur la trajectoire du dateur $x(k)$.

Remarque 24 (Opérateur γ). *Puisque $\gamma \otimes d(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \gamma^{k+1} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d(k-1) \gamma^k$, l'opérateur γ peut être vu comme un opérateur de retard dans le domaine événementiel. En effet, pour toute série s , $s(k-1) = \gamma s(k)$.*

Ces séries formelles font partie du dioïde complet $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$.

Définition 46 (Dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$). *L'ensemble des séries formelles en l'indéterminée γ à exposants dans \mathbb{Z} et coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ possède une structure de dioïde. La somme et le produit de séries formelles sont définis comme suit :*

$$\begin{aligned} d_1(\gamma) \oplus d_2(\gamma) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (d_1(k) \oplus d_2(k)) \gamma^k \\ d_1(\gamma) \otimes d_2(\gamma) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (d_1(j) \oplus d_2(k-j)) \gamma^k \end{aligned}$$

L'élément neutre de la somme est la série $\varepsilon(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon \gamma^k$ (où $\varepsilon = -\infty$ est l'élément neutre de la somme de $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$). L'élément neutre du produit est la série $e(\gamma) = e \gamma^0$ (où $e = 0$ est l'élément neutre de la multiplication de $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$).

De manière duale, on peut introduire une transformée pour les compteurs, qui ont été définis comme des applications décroissantes de \mathbb{Z} dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$.

Définition 47. La transformée en l'indéterminée δ d'un compteur c est la série formelle

$$c(\delta) \triangleq \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} c(t) \delta^t.$$

Le monôme $c(t) \delta^t$ s'interprète comme le postulat suivant : à la date t se sont déroulés au plus k événements. La série $c(\delta)$ correspond, elle aussi, à une somme d'informations, mais sur la trajectoire du compteur $x(t)$.

Remarque 25 (Opérateur δ). Supposons deux compteurs c_1 et c_2 reliés par l'égalité $c_1(t) = c_2(t - 1)$, ce qui correspond à deux transitions séparées par une unique place de marquage nul et à laquelle est attachée une temporisation d'une unité de temps. Ainsi, on a $c_1(\delta) = \delta c_2(\delta)$. L'opérateur δ peut donc être vu comme un opérateur de retard dans le domaine temporel.

Les séries formelles associées aux compteurs peuvent être manipulées comme des éléments du dioïde complet $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$.

Définition 48 (Dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$). L'ensemble des séries formelles en l'indéterminée δ à exposant dans \mathbb{Z} et coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ a une structure de dioïde. La somme et le produit de séries formelles sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} c_1(\delta) \oplus c_2(\delta) &= \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} (c_1(t) \oplus c_2(t)) \delta^t \\ c_1(\delta) \otimes c_2(\delta) &= \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (c_1(j) \oplus c_2(t - j)) \delta^t \end{aligned}$$

Les éléments neutres de la somme et du produit sont respectivement les séries $\varepsilon(\delta) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \varepsilon \delta^i$ et $e(\delta) = e \delta^0$.

Filtrage de trajectoires monotones

Les dateurs issus de GET ont par définition une évolution monotone (la date $d(k)$ de l'occurrence de l'événement k est nécessairement supérieure à celle de l'événement numéroté $k - 1$). Or le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$ permet de retranscrire tout type de série, y compris des trajectoires non monotones. Considérons, sur des séries formelles en l'indéterminée γ , la définition de la relation d'ordre \succ définie dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ (cf. le théorème 2 à la page 22). On a :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, d(k) \succ d(k - 1) \iff d(k) = d(k) \oplus d(k - 1).$$

Ce qui est équivalent à

$$d(\gamma) = d(\gamma) \oplus \gamma d(\gamma) \iff d(\gamma) = \gamma^* d(\gamma).$$

En somme, la transformée en γ d'une trajectoire monotone est forcément de la forme $\gamma^* d(\gamma)$ et la multiplication par γ^* d'une trajectoire non monotone donne une trajectoire monotone croissante. Il s'agit donc d'une sorte de filtre.

L'ensemble des trajectoires monotones forme un dioïde noté $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$. On peut noter que la somme et le produit d'éléments de cet ensemble sont fermés. Il en découle que l'égalité d'éléments doit s'entendre « modulo γ^* » [Lho03].

Exemple 17. On constate l'égalité suivante :

$$3\gamma \oplus 1\gamma^2 \oplus 4\gamma^3 = 3\gamma \oplus 4\gamma^3.$$

Le monôme $(1\gamma^2)$ peut être « absorbé ». On simplifie donc l'écriture de la série, sans perte d'information.

Ce fait admet une interprétation graphique, schématisé par la figure 2.11. Les deux GET de cette figure sont équivalents du point de vue de la relation entrée-sortie. En somme, ils réalisent la même application au plus tôt $u \mapsto y$.

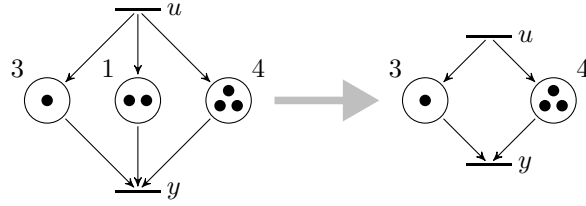


FIG. 2.11 – Interprétation graphique de la simplification d'écriture de séries

La réduction de l'exemple précédent permet de simplifier les calculs sur les séries en ne considérant que leurs réductions « modulo γ ». Ces simplifications visent à éliminer les informations inutiles. De façon plus générale, on peut énoncer la règle de simplification suivante :

$$\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{\min(n, n')}. \quad (2.14)$$

Les éléments neutres pour la somme et le produit de $\gamma^* \bar{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$ sont donc respectivement les séries $\varepsilon(\gamma) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \varepsilon \gamma^i$ et $e(\gamma) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} e \gamma^i$.

Remarque 26 (Représentation de l'arrivée d'une infinité de jetons en entrée). L'ensemble des séries du dioïde $\gamma^* \bar{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$ étant invariantes lorsqu'on les multiplie par la série γ^* , on justifie le fait que la série e est équivalente à γ^* . On peut donc retranscrire l'arrivée d'une infinité de jetons à la date 0 par la série e alors que, normalement, cette situation devrait être retranscrite par la série γ^* . Autrement dit, pour une entrée impulsionnelle e , la sortie d'un système coïncide avec sa réponse impulsionnelle.

Par la suite, nous ne manipulerons que des séries monotones. Par abus de notation et en l'absence d'ambiguïté, $\bar{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$ pourra être compris comme $\gamma^* \bar{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$. Les éléments neutres de ce dioïde seront notés $\varepsilon(\gamma)$ et $e(\gamma)$.

Tout comme les dateurs, les compteurs ont une évolution monotone (le nombre d'événements ayant eu lieu à l'instant $t + 1$, $c(t + 1)$, est nécessairement supérieur au nombre ayant eu lieu à l'instant t , $c(t)$). Plus formellement, on a :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, c(t) \succcurlyeq c(t + 1) \iff c(t) = c(t + 1) \oplus c(t),$$

ce qui équivaut à

$$c(\delta) = \delta^{-1} c(\delta) \oplus c(\delta) \iff c(\delta) = (\delta^{-1})^* c(\delta).$$

En conclusion, la transformée en δ d'une trajectoire monotone appartient au dioïde $(\delta^{-1})^* \overline{\mathbb{Z}}_{\min} \llbracket \delta \rrbracket$. Il en découle la règle de simplification suivante :

$$\delta^t \oplus \delta^{t'} = \delta^{\max(t, t')}. \quad (2.15)$$

Les éléments neutres pour la somme et le produit de $(\delta^{-1})^* \overline{\mathbb{Z}}_{\min} \llbracket \delta \rrbracket$ sont donc respectivement les séries $\varepsilon(\delta) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \varepsilon \delta^i$ et $e(\delta) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} e \delta^i$.

De la même manière que pour la représentation à l'aide de dateurs, par abus de notation et en l'absence d'ambiguïté, $\overline{\mathbb{Z}}_{\min} \llbracket \delta \rrbracket$ peut être compris comme le dioïde $(\delta^{-1})^* \overline{\mathbb{Z}}_{\min} \llbracket \delta \rrbracket$.

Extension matricielle

Rappelons que \mathcal{E} est une notation équivalente à l'ensemble des signaux $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$. En définissant la transformée d'un vecteur $V \in \mathcal{E}^q$ comme le vecteur $V(z)$ des transformées $V_i(z)$ de chaque signal $V_i \in \mathcal{E}$ le composant, on aboutit aisément à une relation équivalente à (2.16) pour un système multi-variables, à savoir :

$$Y(z) = H(z)U(z), \quad (2.16)$$

où $H(z)$ est la *matrice* de transfert de ce système, composée de séries formelles en l'indéterminée z .

Lorsque l'on considère les représentations dateur ou compteur, nous avons vu qu'il était toujours possible d'obtenir une représentation d'état canonique pour un GET (du type (2.4) ou (2.5)). Considérons pour le moment la transformée en γ des applications dateur $U(k)$, $X(k)$ et $Y(k)$ de l'équation (2.4a). On obtient

$$X(\gamma) = \gamma A X(\gamma) \oplus B U(\gamma).$$

Il s'agit d'une équation implicite. Le corollaire 1 donne la plus petite solution de cette équation :

$$X(\gamma) = (\gamma A)^* B U(\gamma).$$

En reportant cette solution dans l'équation (2.4b), on trouve

$$Y(\gamma) = C(\gamma A)^* B U(\gamma) = H(\gamma) U(\gamma) \text{ avec } H(\gamma) = C(\gamma A)^* B. \quad (2.17)$$

Cette équation exprime le comportement entrée-sortie du système et permet de déterminer la valeur de la matrice de transfert du système $H(\gamma)$.

Exemple 18. Pour l'exemple de la figure 2.6, on obtient la représentation par des séries formelles en γ suivante :

$$\begin{cases} X(\gamma) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma^3 \\ 4 & \varepsilon \end{pmatrix} X(\gamma) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \end{pmatrix} U(\gamma) \\ Y(\gamma) = (\varepsilon \quad e) X(\gamma) \end{cases}$$

Le calcul de la matrice de transfert $H(\gamma) = C(\gamma A)^* B$ donne $H(\gamma) = 4(4\gamma^3)^*$. De même, on obtient la représentation par des séries formelles en δ suivante :

$$\begin{cases} X(\delta) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 3 \\ \delta^4 & \varepsilon \end{pmatrix} X(\delta) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \end{pmatrix} U(\delta) \\ Y(\delta) = (\varepsilon \quad e) X(\delta) \end{cases}$$

Le calcul de la matrice de transfert $H(\delta) = C(\delta A)^* B$ donne $H(\delta) = \delta^4(3\delta^4)^*$.

On peut légitimement se demander si la représentation en dateur est plus avantageuse que la représentation en compteur. L'approche dateur permet de se focaliser sur l'occurrence des tirs des transitions. L'approche compteur, quant à elle, dépend d'un pas d'observation temporel. Elle est ainsi plus proche de celle utilisée dans la théorie conventionnelle des systèmes à temps discrets, et semble donc plus naturelle.

Dans les faits, seule la finalité de l'étude permet de trancher pour l'une ou l'autre de ces représentations, comme nous pourrions le constater dans les chapitres suivants.

Représentation graphique de séries formelles

Il est possible de représenter sous forme de graphes les séries formelles de $\mathbb{Z}_{\max}[[\gamma]]$ et $\mathbb{Z}_{\min}[[\delta]]$. Une telle série sera représentée par une collection de points du plan \mathbb{Z}^2 . En fonction du dioïde de séries considéré, les axes du graphe ne seront pas orientés de la même manière. En effet, les séries issues d'applications compteur sont des fonctions du temps, alors que celles issues d'applications dateur sont des fonctions des événements. Pratiquement, si l'on considère une série s en l'indéterminée z , avec $s(z) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} s(n)z^n$, on lui associe l'ensemble des couples $(n, s(n))$ qui correspondent à des coordonnées de points dans un plan « discret ». Cet ensemble de points peut être considéré comme le graphe de l'application $k \mapsto x(k)$. Si l'on associe à $s(z)$ l'hypographe de cette application [Coh95], c'est-à-dire la partie du plan discret qui se situe sous le graphe de l'application, y compris le graphe lui-même (voir la figure 2.12). Cela correspond à l'idée que si le monôme $x(k)z^k$ existe dans la série $s(z)$, alors on ne change pas cette série en lui rajoutant tout monôme $y z^k$ pour $y \leq x(k)$. Dans ces conditions, la somme de séries se traduit simplement par l'union des hypographe correspondants.

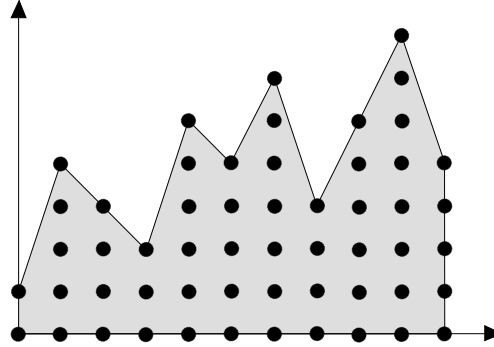


FIG. 2.12 – Un hypographe

Finalement, le dioïde $\mathcal{D}[[z]]$ est isomorphe au dioïde des hypographe (ces derniers étant considérés comme des parties du plan discret), muni de l'union pour somme et de la somme vectorielle pour produit. Dans ce dernier dioïde, en considérant le plan $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ε correspond à l'ensemble vide et T correspond à tout le plan.

Nous avons vu que le dioïde $\mathbb{Z}_{\max}[[\gamma]]$ peut être assimilé à $\gamma^* \mathbb{Z}_{\max}[[\gamma]]$. Un élément générique $\gamma^* s$ où s est une série de $\mathbb{Z}_{\max}[[\gamma]]$ est le produit s , associé à

un hypographe semblable à celui de la figure 2.12, par γ^* qui code la demi-droite horizontale issue de l'origine du plan [Coh95]. Ceci se traduit graphiquement par le fait d'accrocher à chaque point x de l'hypographe de s un cône « sud-est », composé de tous les points dont les abscisses sont supérieures à celle de x et dont les ordonnées sont inférieures à celle de x . Cette opération est représentée sur la figure 2.13. Le résultat obtenu est bien le plus petit hypographe d'une fonction monotone qui contient l'hypographe de s .

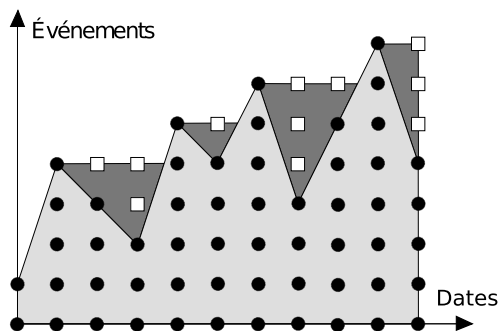


FIG. 2.13 – Meilleure approximation monotone d'une série de $\bar{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$

Un hypographe tel que celui représenté par la figure 2.13 est le représentant maximal de la série correspondant, car il inclut toutes les représentations possibles de cette série¹⁷.

Il est ainsi possible d'utiliser cette représentation (maximale) basée sur des hypographes pour exposer de manière graphique les opérations possibles sur les monômes de dioïdes de série en l'indéterminée z . Nous présentons dans la figure 2.14 les représentations graphiques des 3 opérations suivantes.

1. La somme de deux monômes $s(n_1)z^{n_1}$ et $s(n_2)z^{n_2}$ est représentée graphiquement par l'union des cônes sud-est de sommets respectifs $(n_1, s(n_1))$ et $(n_2, s(n_2))$.
2. Le produit de deux monômes $s(n_1)z^{n_1}$ et $s(n_2)z^{n_2}$ est représenté par le cône de sommet $(n_1 + n_2, s(n_1) + s(n_2))$. Le produit de monômes dans le dioïde des séries correspond donc effectivement à une somme vectorielle dans le dioïde des hypographes.
3. La borne inférieure de deux monômes $s(n_1)z^{n_1}$ et $s(n_2)z^{n_2}$ est représentée par l'intersection des cônes sud-est de sommets respectifs $(n_1, s(n_1))$ et $(n_2, s(n_2))$.

Le représentant minimal d'une série formelle est l'ensemble des sommets qui la déterminent. À titre d'exemple, la série formelle $4\gamma \oplus 3\gamma^2$ admet l'élément $\gamma^*(\delta^{-1})^*4\gamma$ comme représentant maximal (ce qui correspond graphiquement à toute la surface du cône sud-est de sommet $(1, 4)$) et 4γ comme représentant minimal (seulement le sommet de ce cône) [BCOQ92]. On constate que le représentant minimal correspond à l'application des règles de simplification (2.14)

¹⁷. si l'on ajoute un nombre quelconque de monômes, correspondant aux points de l'hypographe issu d'une série, aux monômes correspondant aux points du graphe de cette série, on ne modifie pas la sémantique de la série, conformément aux règles de simplification (2.14) et (2.15)

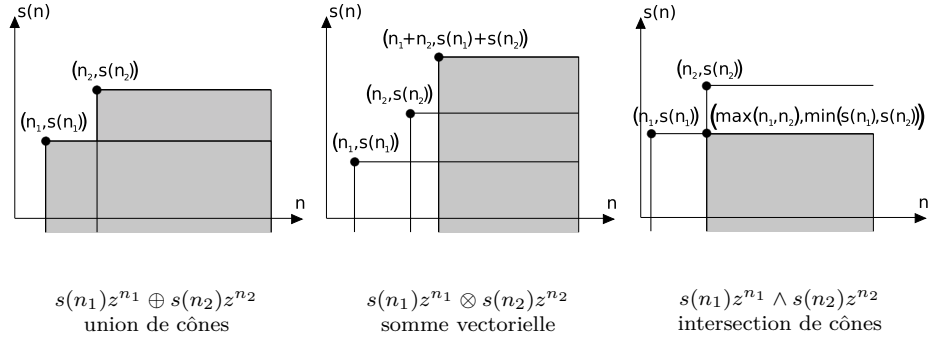


FIG. 2.14 – Représentation graphique des opérations sur des monômes

et (2.15). On représentera par la suite systématiquement les séries de manière graphique par leur forme minimale, si elle existe.

Causalité et périodicité de séries rationnelles

Nous présentons dans cette partie quelques propriétés de séries formelles qui seront utiles aux développements présentés dans les chapitres suivants ; nos contributions se focalisant sur les notions de causalité et de périodicité. Dans un souci de généralité, le contexte algébrique utilisé dans cette partie sera celui du dioïde $\mathcal{D}[[z]]$ de séries formelles en l'indéterminée z .

Définition 49 (Causalité). *Une série $s \in \mathcal{D}[[z]]$ est dite causale si $s = \varepsilon$ (la série nulle de ce dioïde) ou si son représentant minimal est à coefficients et exposants dans \mathbb{N} . Une matrice est dite causale si tous ses coefficients sont causaux.*

Remarque 27. *Ainsi la série $3\gamma^2 \oplus 4\gamma^3$ est bien un élément causal de $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$, car son représentant minimal (obtenu après simplification) est le monôme $3\gamma^2$. De manière générale, un élément de $s \in \mathcal{D}[[z]]$ est causal si les sommets de son hypographe appartiennent au quartier nord-est du plan \mathbb{Z}^2 .*

Remarque 28. *La notion de causalité pour les signaux est présentée dans l'annexe A. On constate, bien heureusement, que la définition de la causalité pour une réponse impulsionnelle et pour une série périodique est la même.*

Si l'on considère une série comme l'ensemble de ses monômes, on peut définir une suite, dont on dira qu'elle est ultimement périodique si elle satisfait la définition suivante.

Définition 50 (Suite ultimement périodique). *Une suite d'éléments $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite ultimement périodique quand il existe $n_0, p \in \mathbb{N}$ tels que $x_{n+p} = x_n$, $\forall n \geq n_0$.*

La notion de périodicité ultime permet donc de savoir si un système possède un comportement périodique, suite à une phase transitoire éventuelle. En interprétant les éléments de cette suite comme l'ensemble des points d'un graphe (discret), la période que nous venons de caractériser renvoie à la pente d'une partie ce graphe, en ne considérant pas les n_0 premiers points de ce graphe.

Il est à constater que les séries issues de signaux ultimement périodiques admettent une forme bien particulière.

Théorème 15 (Périodicité [Lib96, Proposition I.11]). *Une série $s \in \mathcal{D}[[z]]$ est périodique si et seulement s'il existe deux polynômes P et Q avec $c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathcal{D}$ tels que :*

$$s = p \oplus q(\lambda z^c)^*. \quad (2.18)$$

Une matrice est dite périodique si tous ses coefficients sont périodiques.

Démonstration : Premièrement, si s est périodique, alors elle peut nécessairement s'écrire sous la forme (2.18).

Deuxièmement, appelons t et u les séries définies par $t = q(\lambda z^c)^*$ et $u = (\lambda z^c)^*$. Alors en utilisant le degré d'un polynôme introduit dans la définition 26, pour tout $k > \text{Deg}(p)$, on a

$$\begin{aligned} s(k+c) &= t(k+c) \\ &= \bigoplus_{n=0}^{\text{Deg}(q)} q(n)u(k+c-n) \\ &= \bigoplus_{n=0}^{\text{Deg}(q)} \lambda q(n)u(k-n) \\ &= \lambda t(k) = \lambda s(k). \end{aligned}$$

□

Ainsi les valeurs de λ et de c déterminent la valeur de la période du système.

Définition 51 (Pente asymptotique). *Soit $h \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$ un signal ultimement périodique tel que, pour $t > t_0$, $h(t) = N \otimes h(t-T)$. La pente asymptotique de h est notée $\sigma(h) = \frac{N}{T}$.*

Théorème 16. *L'ensemble des séries périodiques de $\mathcal{D}[[z]]$ est stable pour la somme, le produit, la borne inférieure et la résiduation. Soient s_1 et s_2 deux séries périodiques non dégénérées¹⁸, on obtient les résultats suivants :*

$$\begin{aligned} \sigma(s_1 \oplus s_2) &= \min(\sigma(s_1), \sigma(s_2)), \\ \sigma(s_1 \otimes s_2) &= \min(\sigma(s_1), \sigma(s_2)), \\ \sigma(s_1 \wedge s_2) &= \max(\sigma(s_1), \sigma(s_2)), \\ \sigma(s_2 \setminus s_1) &= \begin{cases} \sigma(s_1) & \text{si } \sigma(s_1) < \sigma(s_2), \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration : Des démonstrations de ces résultats peuvent être trouvées dans [Gau92, Chapitre VII]. □

Exemple 19. *La figure 2.15 illustre l'exemple d'une application compteur, dont la phase transitoire dure 14 unités de temps et dont la pente asymptotique est $\frac{N}{T} = 2$.*

D'une manière semblable à celle de l'exemple 19, les systèmes de production que nous étudions comportent généralement deux modes de fonctionnement : une première phase transitoire, puis un régime périodique. Le calcul de cette pente asymptotique nous permettra d'obtenir la cadence du régime périodique de ces SdP.

18. telles que $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $c_1 \neq 0$ et $c_2 \neq 0$

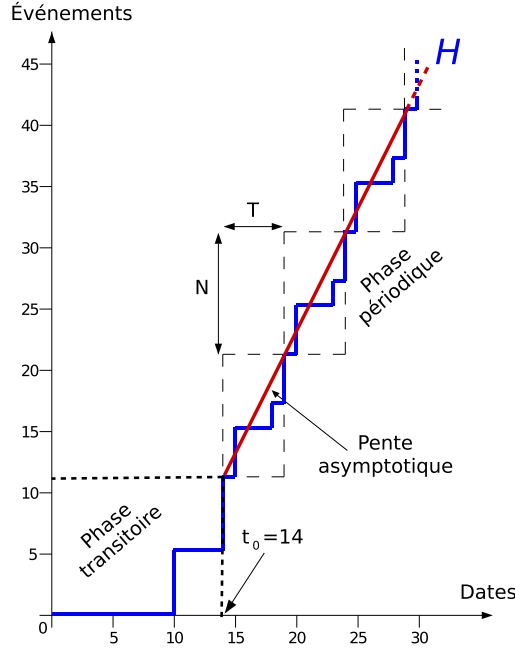


FIG. 2.15 – Représentation graphique de la pente asymptotique d'une application compteur

Incertitudes temporelles et analyse par intervalles

Nous abordons maintenant le cas des GET incluant des temporisations incertaines. On peut, de la même manière que pour les GET « ordinaires », obtenir le comportement entrée-sortie de ces GET sous forme de séries périodiques.

Dans un premier temps, généralisons au diode de séries $\mathcal{D}[[z]]$ en l'indéterminée z ¹⁹. On rappelle qu'il est toujours possible d'obtenir la représentation d'état d'un GET sous la forme suivante :

$$\begin{cases} X(z) = zAX(z) \oplus BU(z) \\ Y(z) = CX(z) \end{cases}$$

où $X \in (\mathcal{D}[[z]])^n$, $U \in (\mathcal{D}[[z]])^p$ et $Y \in (\mathcal{D}[[z]])^q$ représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur de commande et le vecteur de sortie. En outre, les matrices $A \in (\mathcal{D}[[z]])^{n \times n}$, $B \in (\mathcal{D}[[z]])^{n \times p}$ et $C \in (\mathcal{D}[[z]])^{q \times n}$ sont respectivement la matrice d'état, la matrice de commande et la matrice de sortie du système.

Cette représentation déterministe suppose que le modèle est parfaitement connu et que ses paramètres ne font pas l'objet de variation au cours du temps. Cette hypothèse est parfois trop restrictive. Il est souhaitable dans certains cas de prendre en compte dans le modèle les informations relatives aux incertitudes d'un système. Deux approches sont possibles : soit considérer la nature statistique des incertitudes (voir [BCOQ92] pour l'étude des GET stochastiques), soit en émettant des hypothèses sur les amplitudes de variations des paramètres. Nous considérons ici ce second point de vue.

19. pouvant être indifféremment $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$

Pour représenter les incertitudes lors de la modélisation de GET, nous allons considérer que les matrices A , B et C caractéristiques du système peuvent prendre n'importe quelle valeur dans des intervalles. La connaissance de l'amplitude maximale des variations de chacun des paramètres du système permettra d'établir ce modèle incertain sous la forme d'un système décrit dans un dioïde d'intervalles.

Dans ce cadre de modélisation, un système étudié pourra donc s'écrire

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} \hat{\oplus} \mathbf{B}\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.19a) \\ (2.19b) \end{matrix}$$

où $A \in \mathbf{A} \in (I(\mathcal{D}[\![z]\!]))^{n \times n}$, $B \in \mathbf{B} \in (I(\mathcal{D}[\![z]\!]))^{n \times p}$ et $C \in \mathbf{C} \in (I(\mathcal{D}[\![z]\!]))^{q \times n}$. Autrement dit, les coefficients des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} appartiennent au dioïde des intervalles $I(\mathcal{D}[\![z]\!])$ et les bornes de ces coefficients appartiennent au dioïde $\mathcal{D}[\![z]\!]$.

À partir de cette représentation d'état, nous pouvons donner l'expression de l'intervalle contenant l'ensemble des relations de transferts entrée-sortie possibles pour le GET avec incertitudes temporelles correspondant. Dans un premier temps, le corollaire 1 nous donne $\mathbf{X} = \mathbf{A}^* \mathbf{B} \mathbf{U}$ comme plus petite solution de l'équation (2.19a) (cf. la remarque 16 à la page 35). De plus, d'après le théorème 9, la matrice d'intervalles $\mathbf{A}^* \mathbf{B} \in (I(\mathcal{D}[\![z]\!]))^{n \times p}$ est la plus petite contenant l'ensemble

$$\{\mathbf{A}^* \mathbf{B} \mid A \in \mathbf{A} \text{ et } B \in \mathbf{B}\}.$$

Ensuite, en reportant l'état \mathbf{X} dans l'équation de sortie (2.19b), on a :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \mathbf{A}^* \mathbf{B} \mathbf{U},$$

où $\mathbf{C} \mathbf{A}^* \mathbf{B} \in (I(\mathcal{D}[\![z]\!]))^{q \times p}$. $\mathbf{H} = \mathbf{C} \mathbf{A}^* \mathbf{B}$ représente l'intervalle contenant l'ensemble des relations entrée-sortie du GET incertain.

Pour illustrer cette représentation, considérons le graphe d'événements temporisés de la figure 2.16. Sur ce graphe, u_1 , u_2 et y désignent les entrées et la sortie du système. Pour une temporisation sous forme d'intervalle $[\alpha, \beta]$, α est le temps de séjour minimal avant de pouvoir contribuer au tir de la transition aval et si le temps de séjour d'un jeton dans cette place atteint la valeur β , alors ce jeton devra être utilisé pour le tir de la transition aval dès que possible (en fonction des synchronisations éventuelles). En l'occurrence, les postes de travail M_2 et M_3 sont des machines d'assemblage (2 entrées et 1 sortie). La machine M_2 , en fonction de la qualité des matières premières, aura à passer plus ou moins de temps sur chaque produit ; mais on sait par avance combien de temps cela prendra au moins et au plus. Le déplacement des produits de la ligne de production comprenant les postes M_1 et M_3 de et vers la machine M_2 prend un temps défini selon la disponibilité des opérateurs. Pour finir, le déchargement du stock aval de la machine M_3 prendra un temps plus ou moins long, en fonction des compétences de l'opérateur qui viendra réaliser cette tâche.

À partir des données chiffrées présentées sur le GET de la figure 2.16, nous pouvons par exemple modéliser ce système de la manière suivante dans le dioïde

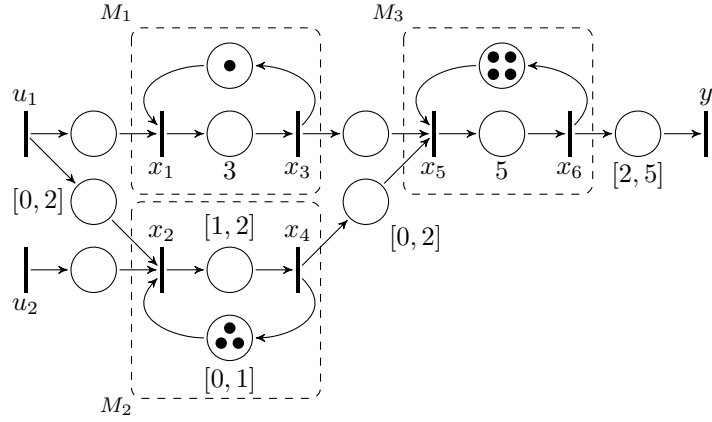


FIG. 2.16 – GET avec incertitudes temporelles représentant un système indéterministe

$\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\gamma, \gamma] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\gamma^3, \gamma^3] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [3, 3] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [1, 2] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [e, e] & [0, 2] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\gamma^4, \gamma^4] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [5, 5] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix} \mathbf{X} \hat{\oplus} \begin{pmatrix} [e, e] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [0, 2] & [e, e] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix} \mathbf{U}$$

$$\mathbf{Y} = ([\varepsilon, \varepsilon] \quad [\varepsilon, \varepsilon] \quad [\varepsilon, \varepsilon] \quad [\varepsilon, \varepsilon] \quad [\varepsilon, \varepsilon] \quad [2, 5]) \mathbf{X}$$

De cette représentation d'état, il est possible de donner l'intervalle contenant l'ensemble des transferts entrée-sortie du système. Posons $\mathbf{H} = \mathbf{CA}^*\mathbf{B} = (\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2)$. Ainsi :

$$\mathbf{H}_1 = [8\gamma^2(3\gamma)^*, 11\gamma^5 \oplus 14\gamma^7(3\gamma)^*]$$

$$\mathbf{H}_2 = [(6\gamma^2 \oplus 7\gamma^5)(5\gamma^4)^*, 9\gamma^5 \oplus (12\gamma^8 \oplus 14\gamma^9 \oplus 15\gamma^{11})(5\gamma^4)^*].$$

2.3 Composition de systèmes linéaires

Un système complexe peut être décomposé en un certain nombre de sous-systèmes. Inversement, plusieurs systèmes (identiques ou différents) peuvent être composés entre eux, afin de former un système plus complexe. Une propriété fondamentale dans la théorie conventionnelle des systèmes linéaires veut qu'un système résultant de la mise en série, en parallèle et/ou en *feedback*²⁰ de systèmes linéaires est également un système linéaire (cf. la définition 63).

Comme il a été montré dans [Plu91a] et [BCOQ92, Chapitre 6], les systèmes linéaires sur un dioïde donné peuvent, de façon analogue, être composés

20. le terme français est « contre-réaction » (l'expression « retour de sortie » pouvant aussi être rencontrée), mais le terme anglo-saxon est beaucoup plus utilisé dans la communauté

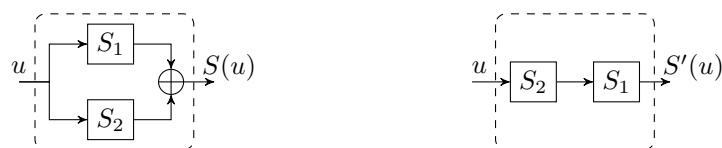
entre eux pour former un système linéaire. Après avoir rappelé cette propriété, on s'applique à donner les représentations (réponse impulsionnelle et modèle d'état) correspondant à la mise en série, en parallèle ou en feedback de systèmes linéaires.

Nous présentons dans cette partie les trois compositions de systèmes linéaires engendrant des systèmes linéaires eux aussi : les compositions parallèle et série, et la mise en feedback. Les compositions parallèle et série sont présentées ensemble car elle font directement référence aux lois d'un dioïde. La mise en feedback, quant à elle, renvoie à une opération plus complexe. Afin d'alléger les écritures, on se restreint aux systèmes mono-variable ; l'extension au cas multi-variables étant naturelle. Rappelons que le dioïde \mathcal{D} de support de l'ensemble des signaux $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$ est complet.

Le cas de composition générant des conflits sera abordé dans cette dernière partie, car il consiste en la mise en concurrence de plusieurs systèmes.

2.3.1 Compositions parallèle et série

On munit l'ensemble des systèmes linéaires de deux opérations internes appelées compositions parallèle et série, que l'on note respectivement \oplus et \otimes . Ces deux phénomènes sont représentés dans les figures 2.17 (a) et (b).



(a) Composition parallèle

(b) Composition série

FIG. 2.17 – Compositions de systèmes linéaires

Le système $S = S_1 \oplus S_2$ est la composition parallèle de S_1 et S_2 et est défini par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (S(u))(n) = (S_1(u))(n) \oplus (S_2(u))(n).$$

La composition série de S_1 et S_2 , quant à elle, s'écrit $S' = S_1 \otimes S_2$ et est définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (S'(u))(n) = (S_1(S_2(u)))(n).$$

On peut aussi définir une troisième opération, d'amplification (à gauche) par un scalaire de \mathcal{D} . Cette opération externe est notée \bullet .

En utilisant la linéarité et la continuité des systèmes composés, on vérifie

aisément, dans chacun des cas, les systèmes S et S' sont linéaires :

$$\begin{aligned}
 \left(S \left(\bigoplus_i \alpha_i \bullet u_i \right) \right) (n) &= \left(S_1 \left(\bigoplus_i \alpha_i \bullet u_i \right) \right) (n) \oplus \left(S_2 \left(\bigoplus_i \alpha_i \bullet u_i \right) \right) (n) \\
 &= \bigoplus_i \alpha_i \bullet (S_1(u_i))(n) \oplus \bigoplus_i \alpha_i \bullet (S_2(u_i))(n) \\
 &= \bigoplus_i \alpha_i \bullet \left((S_1(u_i))(n) \oplus (S_2(u_i))(n) \right) \\
 &= \bigoplus_i \alpha_i \bullet (S(u_i))(n), \\
 \left(S' \left(\bigoplus_i \alpha_i \bullet u_i \right) \right) (n) &= \left(S_1 \left(S_2 \left(\bigoplus_i \alpha_i \bullet u_i \right) \right) \right) (n) \\
 &= \left(S_1 \left(\bigoplus_i \alpha_i \bullet S_2(u_i) \right) \right) (n) \\
 &= \left(\bigoplus_i \alpha_i \bullet S_1(S_2(u_i)) \right) (n) \\
 &= \bigoplus_i \alpha_i \bullet (S'(u_i))(n).
 \end{aligned}$$

Théorème 17. Soient S_1 et S_2 deux systèmes linéaires de réponses impulsionnelles respectives h_1 et h_2 .

1. La réponse impulsionnelle h de $S = S_1 \oplus S_2$ est donnée par :

$$\forall t, s \in \mathbb{Z}, h(t, s) = h_1(t, s) \oplus h_2(t, s).$$

2. La réponse impulsionnelle h' de $S' = S_1 \otimes S_2$ est donnée par :

$$\forall t, s \in \mathbb{Z}, h'(t, s) = \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} h_1(t, \tau) h_2(\tau, s).$$

Démonstration : Il faut identifier les expressions des réponses impulsionnelles des systèmes résultant de la mise en parallèle et série de S_1 et S_2 . Pour les besoins de cette preuve, nous utilisons l'expression de la sortie des systèmes

en fonction de leurs entrées. On obtient alors respectivement :

$$\begin{aligned}
 (S(u))(t) &= \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h(t, s)u(s) && \text{par définition} \\
 &= (S_1(u))(t) \oplus (S_2(u))(t) && \text{par la composition} \\
 &= \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h_1(t, s)u(s) \oplus \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h_2(t, s)u(s) \\
 &= \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} (h_1(t, s) \oplus h_2(t, s))u(s),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (S'(u))(t) &= \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h'(t, s)u(s) && \text{par définition} \\
 &= (S_1(S_2(u)))(t) && \text{par la composition} \\
 &= \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} h_1(t, \tau)(S_2(u))(\tau) \\
 &= \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} h_1(t, \tau) \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h_2(\tau, s)u(s) \\
 &= \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} h_1(t, \tau)h_2(\tau, s) \right) u(s).
 \end{aligned}$$

□

Théorème 18. Soient S_1 et S_2 deux systèmes linéaires de réalisations d'état respectives $(A_1(t), B_1(t), C_1(t))$ et $(A_2(t), B_2(t), C_2(t))$, avec $t \in \mathbb{Z}$.

1. Une réalisation $(A(t), B(t), C(t))$ de $S = S_1 \oplus S_2$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \forall t \in \mathbb{Z}, A(t) &= \begin{pmatrix} A_1(t) & \varepsilon \\ \varepsilon & A_2(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \\
 C(t) &= (C_1(t) \quad C_2(t)).
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

2. Une réalisation $(A'(t), B'(t), C'(t))$ de $S = S_1 \otimes S_2$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \forall t \in \mathbb{Z}, A'(t) &= \begin{pmatrix} A_1(t) & B_1(t)C_2(t) \\ \varepsilon & A_2(t) \end{pmatrix}, \quad B'(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ B_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \\
 C'(t) &= (C_1(t) \quad \varepsilon).
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Démonstration : Notons X_1 et X_2 les vecteurs d'état respectifs de S_1 et S_2 . En choisissant $X^T = (X_1^T \quad X_2^T)$ comme vecteur d'état de S , on obtient les représentations (2.20) et (2.21). □

2.3.2 Mise en feedback

Soit S le système résultant de la mise en feedback de S_2 sur S_1 .

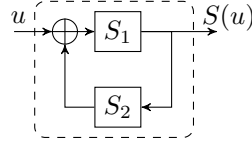


FIG. 2.18 – Mise en feedback

La relation d'entrée-sortie de S s'écrit :

$$\begin{aligned}
 y &= S(u) \\
 &= S_1(S_2(y) \oplus u) \\
 &= S_1(S_2(y)) \oplus S_1(u) \\
 &= \mathcal{H}(y) \oplus S_1(u)
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

en ayant défini l'application $\mathcal{H} \triangleq S_1 \otimes S_2$.

L'équation (2.22) n'admet pas toujours une unique solution. En d'autres termes, il n'est pas possible de caractériser de façon unique le signal de sortie du système bouclé. On prend alors pour convention que cette sortie y correspond à la plus petite solution de (2.22) donnée par le théorème 4 :

$$y = \mathcal{H}^*(S_1(u)), \tag{2.23}$$

avec

$$\mathcal{H}^0 = \text{Id}, \mathcal{H}^n = \underbrace{\mathcal{H}(\mathcal{H}(\dots(\mathcal{H})))}_{n \text{ fois}} \text{ et } \mathcal{H}^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^n. \tag{2.24}$$

L'expression (2.24) met en évidence que le système S correspond à la mise en série et en parallèle (une infinité de fois) des systèmes S_1 et S_2 . La convention qui consiste à sélectionner la plus petite solution se justifie pleinement lorsque l'on s'intéresse aux SDED. Sélectionner cette solution extrême revient à considérer un comportement souhaité du système (le comportement au plus tôt des transitions d'un RdP, en l'occurrence). On a précédemment vérifié que la composition parallèle et série de systèmes linéaires donne un système linéaire; on en déduit donc la linéarité de S issue de la mise en feedback de S_2 sur S_1 . Le théorème suivant synthétise ces conclusions.

Théorème 19. *Tout système obtenu par compositions parallèle et série, et par mises en feedback systèmes linéaires, est également un système linéaire.*

Théorème 20. *Soient S_1 et S_2 deux systèmes linéaires de réponses impulsionnelles respectives h_1 et h_2 . La réponse impulsionnelle du système S issu de la mise en feedback de S_2 sur S_1 est donnée par la relation*

$$h(t, s) = ((h_1 \tilde{\otimes} h_2)^* \tilde{\otimes} h_1)(t, s),$$

où

$$\begin{aligned}(h_1 \tilde{\otimes} h_2)(t, s) &= \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} h_1(t, \tau) h_2(\tau, s), \\ (h_1 \tilde{\otimes} h_2)^n &= \underbrace{(h_1 \tilde{\otimes} h_2) \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} (h_1 \tilde{\otimes} h_2)}_{n \text{ fois}} \text{ et} \\ (h_1 \tilde{\otimes} h_2)^* &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (h_1 \tilde{\otimes} h_2)^n\end{aligned}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}y(t) &= \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \left(\mathcal{H}^n(S_1(u)) \right)(t) \\ &= (S_1(u))(t) \oplus (S_1 \otimes S_2 \otimes S_1(u))(t) \oplus \cdots \\ &= \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h_1(t, s) u(s) \oplus \bigoplus_{\tau_1 \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{\tau_2 \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h_1(t, \tau_1) h_2(\tau_1, \tau_2) h_1(\tau_2, s) u(s) \oplus \cdots \\ &= \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h_1(t, s) u(s) \oplus \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} ((h_1 \tilde{\otimes} h_2) \tilde{\otimes} h_1)(t, s) u(s) \oplus \cdots \\ &= \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (h_1 \tilde{\otimes} h_2)^n \tilde{\otimes} h_1 \right)(t, s) u(s).\end{aligned}$$

□

Théorème 21. Soient S_1 et S_2 deux systèmes linéaires de réalisations d'état respectives $(A_1(t), B_1(t), C_1(t))$ et $(A_2(t), B_2(t), C_2(t))$, avec $t \in \mathbb{Z}$. Une réalisation $(A(t), B(t), C(t))$ de S issue de la mise en feedback de S_2 sur S_1 est donnée par :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{Z}, A(t) &= \begin{pmatrix} A_1(t) & B_1(t)C_2(t) \\ B_2(t)C_1(t) & A_2(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ \varepsilon \end{pmatrix} \text{ et} \\ C(t) &= (C_1(t) \quad \varepsilon).\end{aligned}$$

Démonstration : En notant X_1 et X_2 les vecteurs d'état respectifs de S_1 et S_2 et en choisissant $X^T = (X_1^T \quad X_2^T)$ comme vecteur d'état de S , on obtient la réalisation donnée par le théorème. □

2.3.3 Autres formes de composition

D'autres formes de composition existent, comme la mise en conflit de plusieurs sous-systèmes par rapport à des ressources ou à la consommation de produits, ou plus largement tout phénomène de choix. Ceci se représente dans le paradigme des réseaux de Petri à l'aide de motifs semblables à ceux des figures 2.4 (a) et 2.4 (b), page 42.

Ceci entraîne inexorablement une perte de la linéarité du modèle exact du système global. En effet, la représentation d'état de ce système étant basé sur des équations liant les transitions, il apparaît dans le cas d'un conflit que certaines transitions peuvent posséder plusieurs transitions amont ou aval. Ainsi, certaines équations liant les transitions entre elles peuvent avoir plusieurs solutions. Ceci

correspond bien au fait que des décisions entre plusieurs possibilités doivent être prises pour résoudre les conflits.

Comme nous le verrons plus en détail dans les chapitres suivants, en se satisfaisant d'une certaine approximation, il est cependant possible de caractériser un modèle linéaire pour des systèmes possédant des conflits.

2.4 Bilan

Ce chapitre a été consacré à la modélisation analytique des systèmes. Le comportement des graphes d'événements temporisés est régi par des équations qui sont linéaires dans un dioïde. Les GET présentent le double avantage de mettre en évidence la structure profonde d'une situation donnée et de fournir une vision globale du système, constituant un guide précieux pour le raisonnement [GM79]. Les représentations d'état basées sur des dateurs et des compteurs d'événements nous ont permis de représenter les systèmes sous une forme récurrente explicite canonique.

D'un point de vue entrée-sortie, il est aussi possible de représenter d'une façon univoque un système linéaire par sa réponse impulsionnelle. Cette dernière permet de manipuler tout le comportement du système en un élément, ce qui simplifie la caractérisation des sorties d'un système en fonction de ses entrées.

Les systèmes manipulés dans un dioïde donné peuvent aussi être représentés par des fonctions de transfert (ou des matrices de transfert dans le cas MIMO), en utilisant des transformations analogues aux transformées en z de la théorie des signaux en temps discret. Ces fonctions se présentent sous la forme de séries formelles, intégrant en particulier de manière explicite la périodicité des systèmes qu'elles représentent.

Par ailleurs, les systèmes peuvent être composés entre eux, mais le système global ainsi formé n'est pas toujours linéaire dans un dioïde, en particulier s'il présente des conflits. Nous proposerons, dans les chapitres suivants, notre approche de modélisation linéaire de phénomènes de routage, puis de partage de ressources, en utilisant dans chacun des cas une analyse par intervalles.

Chapitre 3

Modélisation d'un routage entre sous-systèmes parallèles

Les systèmes que nous étudions présentent une certaine complexité ; il est généralement possible de les décomposer en sous-systèmes. Bien souvent, il existe entre ces derniers des conflits structurels, en particulier sous forme de routages, qui font converger ou diverger les flux de produits. Pour cette forme de conflit, l'alimentation des sous-systèmes parallèles est commune, et il existe un point de décision nécessaire, qui influe sur le devenir des produits ; ils iront dans l'un ou l'autre des sous-systèmes en fonction de gammes prédéfinies. On considère ainsi une politique de routage donnée (en général statique) pour résoudre ces conflits. Mais il n'a pas encore été trouvé de manière pour représenter graphiquement ce type de systèmes dans un GET et, a fortiori, analytiquement dans un dioïde.

Dans ce chapitre, nous contournons ce problème en proposant un encadrement du comportement entrée-sortie d'un système comportant plusieurs sous-systèmes en concurrence sur la consommation (cf. la figure 2.4 (a), à la page 42). L'encadrement fourni contient tous les comportements possibles du système étudié. Ainsi, même si le comportement entrée-sortie d'un tel système n'est pas linéaire dans le dioïde considéré, il peut néanmoins être encadré par celui de deux systèmes linéaires ; l'un plus lent, l'autre plus rapide. On peut donc proposer un modèle approché de systèmes de production comportant des routages grâce à un dioïde d'intervalles.

Le présent chapitre est constitué comme suit.

La première section présente les différentes formes possibles de parallélisme pour les sous-systèmes, ainsi que les fonctions de routage que nous utiliserons. Cette section comporte aussi un état de l'art, où l'on compare les approches semblables à la nôtre.

La deuxième section fait l'objet d'une caractérisation de la borne inférieure du comportement entrée-sortie du système global, cette première étant indépendante de la politique de routage utilisée. L'étude de l'influence de la politique de routage sur le comportement des systèmes globaux nous permet, dans la section suivante, de spécifier un majorant du comportement de ces systèmes, dépendant de la politique de routage utilisée.

Dans le cas particulier d'un routage par lots entre deux sous-systèmes parallèles, il est possible de déterminer les rendements correspondants pour les différents sous-systèmes. Ainsi, pour certaines valeurs bien spécifiques de ces lots, les bornes de l'intervalle des comportements entrée-sortie possibles, et donc tous ceux qui appartiennent à cet intervalle, possèdent la même cadence. Dans ce cas précis, les intervalles ont une taille minimale. On obtient donc un modèle relativement proche de la réalité. La manière d'obtenir un tel routage optimal est présentée dans la section 3.4.

Pour finir, un cas d'application de notre approche est présenté.

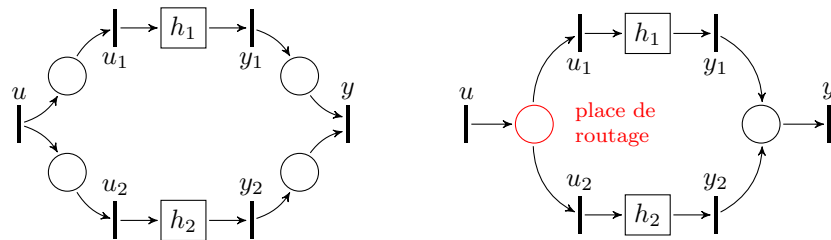
La contribution principale de ce chapitre est de montrer que, pour des politiques de routage dites « périodiques » ou « équilibrées », le comportement entrée-sortie du système peut être encadré par celui de deux systèmes linéaires. Cette approche a fait l'objet de deux publications [BCLL09a, BCLL09b].

3.1 Le phénomène de routage

Cette section présente ce que nous appelons un routage périodique et un routage équilibré, ainsi que les contraintes que ces types de routages peuvent impliquer. On montre que ces routages ne perturbent pas le caractère isotone des applications dateur liées aux transitions, puis l'on caractérise (sous une forme non linéaire) la relation entrée-sortie de systèmes comportant un routage. Cette section se conclue par les intérêts de notre approche, en la comparant aux approches existantes.

3.1.1 Formes de parallélisme

Une première forme de composition parallèle a été présentée dans la section 2.3.1. Dans ce type de composition, toute impulsion en entrée est répercutée de manière synchronisée dans tous les sous-systèmes composant le système global, comme si cette entrée était dupliquée le nombre de fois nécessaire. Mais il n'existe pas dans la réalité de systèmes permettant une duplication de la sorte ¹. En effet, les entrées sont le plus souvent des entités indivisibles, et seul un des sous-systèmes pourra en jouir de manière exclusive, au détriment des autres.



(a) Parallélisme « conjonctif »

(b) Parallélisme « disjonctif »

FIG. 3.1 – Deux manières de relier des lignes de production parallèles

1. « Rien ne naît ni ne périt, mais des choses déjà existantes se combinent, puis se séparent de nouveau » – Anaxagore de Clazomènes, philosophe Ionien du V^e siècle avant J.-C.

Si deux systèmes linéaires h_1 et h_2 utilisent en parallèle le même signal d'entrée u (cette entrée va à la fois dans h_1 et h_2), le système global h est équivalent à $h_1 \oplus h_2$, qui est lui aussi linéaire [BCOQ92, chapitre 6]. Un tel système h est représenté par la figure 3.1 (a), où les sous-systèmes h_1 et h_2 sont des abstractions de graphes d'événements. Comme l'entrée u est envoyée à la fois en u_1 et en u_2 de manière synchronisée, on dira dans le cadre de cette thèse que ce parallélisme est de type « conjonctif ».

Une autre forme de parallélisme se manifeste quand des sous-systèmes parallèles sont reliés au signal d'entrée de manière *conflictuelle*. Pour ce type de parallélisme, le système global n'est pas linéaire, et ce, même si les sous-systèmes le constituent le sont. Ce phénomène est représenté par la figure 3.1 (b). Les deux sous-systèmes h_1 et h_2 sont linéaires (et peuvent être représentés par des GET), mais l'entrée u est aiguillée *soit* vers u_1 , *soit* vers u_2 . Le réseau de Petri ainsi formé ne peut pas être assimilé à un GET, essentiellement à cause de la place de routage possédant plusieurs arcs sortants. On dira que ce parallélisme est « disjonctif ».

Ces notions de conjonction et de disjonction font directement référence aux opérateurs logiques « et » et « ou ». En effet, dans le premier cas, le signal d'entrée est envoyé à la fois dans un sous-système *et* dans l'autre, alors que dans le deuxième cas, il est envoyé dans un système *ou* dans l'autre². Cette distinction des cas est semblable à celle qui est utilisée en Grafcet [Dav95].

Le parallélisme conjonctif dispose déjà de suffisamment d'apports théoriques pour pouvoir être étudié sans problème (citons, entre autres, [BCOQ92]). Notre contribution porte plus spécifiquement sur le parallélisme disjonctif et vise à en obtenir une modélisation linéaire. Notre approche consiste à considérer le comportement entrée-sortie du système global, pour une politique de routage donnée.

3.1.2 Fonctions de routage périodique

Nous considérons dans cette thèse des routages périodiques ou équilibrés, que nous définissons comme suit.

Définition 52 (Routages périodique et équilibré). *Soit h un système constitué de 2 sous-systèmes h_1 et h_2 en conflit. On note $r = m|n$, avec $m, n \in \mathbb{N}^+$, la fonction de routage en amont de h_1 et h_2 telle que les fonctions dateur u , u_1 et u_2 satisfont*

$$\begin{aligned} \forall k, u_1(k) &= u(\lfloor k/m \rfloor \times (m+n) + (k \bmod m)), \\ u_2(k) &= u(\lfloor k/n \rfloor \times (m+n) + (k \bmod n) + m). \end{aligned}$$

Quand le système global contient plus de deux sous-systèmes parallèles, on note $r = m_1 | \dots | m_p$, avec $m_q \in \mathbb{N}^+$, $\forall q \in [1, p]$, la fonction de routage en amont de ces p sous-systèmes. Ce routage garantit la relation suivante, $\forall q \in [1, p]$:

$$\forall k, u_q(k) = u\left(\left\lfloor \frac{k}{m_q} \right\rfloor \times \left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + (k \bmod m_q) + \sum_{r=1}^{q-1} m_r\right). \quad (3.1)$$

2. de manière exclusive. Il serait donc plus juste de parler de « ou exclusif »

Quand les coefficients de routage sont tous égaux à 1 (c'est-à-dire quand $\sum_{q=1}^p m_q = p$), on dit que le routage est équilibré.

En d'autres termes, pour un SdP comportant un routage périodique $r = m|n$ par exemple, m produits entrants sont d'abord envoyés vers h_1 , ensuite n de ces produits sont aiguillés vers h_2 , puis c'est au tour de m d'entre eux d'être dirigés vers h_1 et ainsi de suite.

Proposition 2. *En appliquant une fonction de routage périodique ou équilibrée, les applications dateur des entrées des différents sous-systèmes conservent leur propriété de monotonie (cf. la définition 21 à la page 25).*

Démonstration : Pour un lot de m_q produits donné, considérons toutes les tailles possibles pour les différents lots envoyés aux différents sous-systèmes.

1. Dans le cas $m_q = 1$ et $m_r \geq 1, \forall r \neq q$, on a $\lfloor k/m_q \rfloor = k$ et $k \bmod m_q = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u_q(k) &= u\left(k\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + \sum_{r=1}^{q-1} m_r\right) && \text{et} \\ u_q(k+1) &= u\left((k+1)\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + \sum_{r=1}^{q-1} m_r\right). \\ \text{Or, } k\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + \sum_{r=1}^{q-1} m_r &\geq (k+1)\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + \sum_{r=1}^{q-1} m_r \\ &\text{et l'application } u \text{ est monotone,} \\ &\text{d'où } u_q(k+1) \succcurlyeq u_q(k). \end{aligned}$$

2. Dans le cas $m_q > 1$ et $m_r \geq 1, \forall r \neq q$,

- (a) si l'entier k est un multiple de m_q , posons $x = k/m$. On a, par définition de la multiplicité, $k \bmod m_q = 0$. Par ailleurs, $\lfloor \frac{k+1}{m_q} \rfloor = x$ et $(k+1) \bmod m_q = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u_q(k) &= u\left(x\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + \sum_{r=1}^{q-1} m_r\right) && \text{et} \\ u_q(k+1) &= u\left(x\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + 1 + \sum_{r=1}^{q-1} m_r\right). \\ \text{Or, } x\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + \sum_{r=1}^{q-1} m_r &\geq x\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + 1 + \sum_{r=1}^{q-1} m_r \\ &\text{et l'application } u \text{ est monotone,} \\ &\text{d'où } u_q(k+1) \succcurlyeq u_q(k). \end{aligned}$$

- (b) si l'entier $k+1$ est un multiple de m_q , posons $x' = \frac{k+1}{m}$. On a par définition de la multiplicité, $(k+1) \bmod m_q = 0$. Par ailleurs,

$\lfloor k/m_q \rfloor = x' - 1$ et $k \bmod m_q = m_q - 1$. Ainsi,

$$u_q(k) = u\left((x' - 1)\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + m_q - 1 + \sum_{r=1}^{q-1} m_r\right) \quad \text{et}$$

$$u_q(k+1) = u\left(x'\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + \sum_{r=1}^{q-1} m_r\right).$$

Or, $\sum_{r=1}^p m_r \geq m_q - 1$, c'est-à-dire

$$(x' - 1)\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + m_q - 1 + \sum_{r=1}^{q-1} m_r \geq x'\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + \sum_{r=1}^{q-1} m_r$$

et l'application u est monotone,

d'où $u_q(k+1) \succcurlyeq u_q(k)$.

(c) si aucun des entiers k et $k+1$ n'est multiple de m_q , on pose $\lfloor k/m_q \rfloor = x''$, $k \bmod m_q = y$ et $(k+1) \bmod m_q = y+1$. Ainsi,

$$u_q(k) = u\left(x''\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + y + \sum_{r=1}^{q-1} m_r\right) \quad \text{et}$$

$$u_q(k+1) = u\left(x''\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + y+1 + \sum_{r=1}^{q-1} m_r\right).$$

$$\text{Or, } x''\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + y + \sum_{r=1}^{q-1} m_r \geq x''\left(\sum_{r=1}^p m_r\right) + y+1 + \sum_{r=1}^{q-1} m_r$$

et l'application u est monotone,

d'où $u_q(k+1) \succcurlyeq u_q(k)$.

Par énumération de tous les cas possibles, nous avons prouvé que les fonctions dateur des entrées des différents sous-systèmes sont isotones, même après application d'une politique de routage périodique ou équilibrée. \square

Exemple 20. *D'un point de vue graphique, le routage équilibré 1|1|1 peut être représenté par les réseaux de Petri de la figure 3.2.*

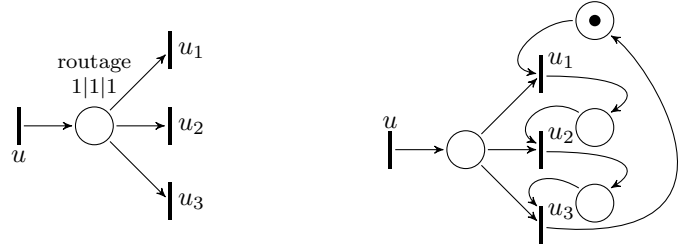
Exemple 21. *Pour la fonction de routage périodique $r = 2|3$, on a*

$$\forall k, u_1(k) = u(\lfloor k/2 \rfloor \times 5 + (k \bmod 2))$$

$$u_2(k) = u(\lfloor k/3 \rfloor \times 5 + (k \bmod 3) + 2).$$

Cette fonction peut être représentée par les réseaux de Petri de la figure 3.3.

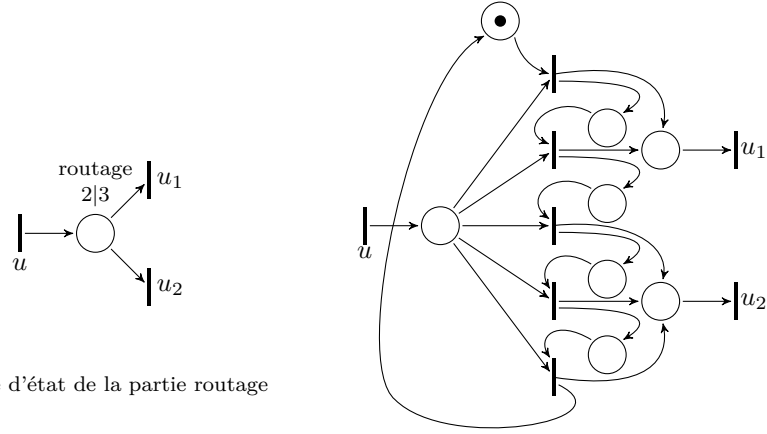
On notera que le seul moyen d'explicitier la politique de routage attachée à une place présentant une concurrence à la consommation est de rajouter un ensemble de places, de transitions et d'arcs contraignant le RdP. On considérera donc, pour conserver une simplicité de représentation, qu'il faudra se référer à la description textuelle du RdP contenant une telle place afin de connaître la politique de routage appliquée.



Graphe d'état de la partie routage

Explicitation du routage

FIG. 3.2 – Représentations de la fonction de routage 1|1|1



Graphe d'état de la partie routage

Explicitation du routage

FIG. 3.3 – Représentations de la fonction de routage 2|3

Notation 6. Le comportement d'un système h composé de deux sous-systèmes h_1 et h_2 et dont la fonction de routage est r sera noté $(h_1|h_2)_r$. Le comportement entrée-sortie de ce système sera donc noté $y = h(u) = (h_1|h_2)_r(u)$.

3.1.3 Réponse impulsionnelle d'un système comportant un routage

Les sous-systèmes h_i que l'on étudie (cf. la figure 3.4) sont linéaires dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ et SISO. Par ailleurs, l'aiguillage entre ces sous-systèmes est géré par une place de routage en amont. Le système global consiste en la mise en parallèle de tous les h_i , créant de la sorte un conflit au niveau de cette place de routage. En considérant les événements comme des impulsions, chaque impulsion en entrée du système global est envoyée vers *une seule* de ses sous-systèmes h_i . En outre, la sortie y collecte tous les événements y_i .

Rappelons tout d'abord comment se comportent, d'un point de vue entrée-sortie, les différents sous-systèmes qui peuvent intervenir dans un routage.

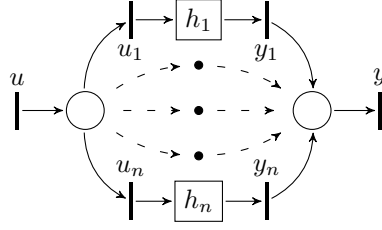


FIG. 3.4 – Forme des systèmes à routage périodiques ou équilibrés

Si nous considérons un système h composé de 2 sous-systèmes h_1 et h_2 , tous deux linéaires dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$, comme il n'y a pas de perte de « signal », nous obtenons les équations suivantes :

$$u(t) = u_1(t) \otimes u_2(t) \text{ et } y(t) = y_1(t) \otimes y_2(t).$$

Comme h_1 et h_2 sont linéaires, on peut définir leurs comportements entrée-sortie sous la forme d'un produit de convolution en utilisant l'opérateur $*$ (cf. l'équation (A.10) de l'annexe A.2.2) :

$$y_1(t) = (h_1 * u_1)(t) \text{ et } y_2(t) = (h_2 * u_2)(t). \quad (3.2)$$

Il s'agit maintenant de lier les deux équations de (3.2) aux fonctions compteur caractérisant l'entrée et la sortie du système global, à savoir $u(t)$ et $y(t)$. En utilisant le produit de Hadamard présenté à la définition 43 de la page 56, il est possible de formuler ce comportement entrée-sortie.

D'un point de vue compteur, les équations de conservation suivantes sont satisfaites, à tout instant d'observation t :

$$u(t) = \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} u_i(t) = \left(\bigodot_{i \in \mathbb{Z}} u_i \right)(t) \text{ et } \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} y_i(t) = y(t) = \left(\bigodot_{i \in \mathbb{Z}} y_i \right)(t). \quad (3.3)$$

En combinant les équations (3.2) et (3.3), nous obtenons donc, comme caractérisation de la relation entrée-sortie d'un système comportant un routage, l'équation suivante :

$$y(t) = ((h_1 * u_1) \odot (h_2 * u_2))(t). \quad (3.4)$$

Remarque 29 (Non linéarité de la relation (3.4)). *Cette représentation pourrait paraître satisfaisante, mais les fonctions compteur u_i , dépendantes du routage, ne sont pas de forme linéaire (car la relation (3.1) fait apparaître des opérations de division entière et de modulo). La sortie du système n'admet donc pas forcément de forme linéaire.*

Pour palier ce problème, nous proposons de calculer une approximation du comportement entrée-sortie du système en l'englobant dans un intervalle et en focalisant les calculs sur les bornes de cet intervalle. On dispose de cette manière d'une représentation linéaire, au sens du dioïde $I(\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^N)$, dont l'amplitude d'approximation peut être mesurée.

3.1.4 État de l'art et intérêts de notre approche

Nous énumérons ici quelques considérations ayant motivé nos travaux, à la lumière des approches identifiées dans la littérature.

État de l'art du routage dans les RdP

Dans [BCG91, Section 3.6.1, page 11] et [BCOQ92, Section 9.5] sont présentées deux politiques de routage, à savoir un routage par « commutation »³ et un routage « compétitif ». Le premier routage peut être dynamique, grâce à l'utilisation de fonctions de routage (dépendant de propriétés des jetons, comme leur numérotation par exemple). Cette politique de routage aboutit à des équations non linéaires dans le dioïde \mathbb{Z}_{\max} , car elles dépendent du partitionnement des jetons dans les places présentant des concurrences à la consommation (cf. la figure 2.4 (a) à la page 42) en des ensembles orientés vers l'une ou l'autre des transitions aval de ces places. Les équations ainsi établies sont complexes et difficilement exploitables. Le routage compétitif, quant à lui, est lié à la gestion de files d'attente, auxquelles on applique une politique FIFO. Une place p présentant une concurrence à la consommation est considérée comme une file d'attente FIFO. Dès qu'une des transitions aval de p est sensibilisée par toutes les autres places amont de cette transition, elle émet une requête afin de réserver le prochain jeton à sortir de la file d'attente de p . Cette requête sera satisfaite quand le jeton correspondant sera le prochain à participer au tir de l'une des transitions aval de p . Cette dernière politique de routage ne paraît pas satisfaisante car elle ne suffit pas à lever toutes les cas d'indéterminisme. En effet, si cette place p ne possède que des transitions aval n'ayant pas d'autre place amont, il n'y a pas de critère permettant de décider laquelle de ces transitions sera tirée en premier.

En se basant sur une sous-classe un peu plus large que celle des GET, à savoir les réseaux de Petri à choix libres (cf. la définition 40 à la page 45), les auteurs de [BFG96] parviennent à établir des équations structurelles linéaires, associées à des équations « quasi $(+, \times)$ linéaires », représentant le routage. Le RdP est décomposé en des graphes d'événements maximaux et un sous-réseau non linéaire de routage. Le modèle proposé repose sur des compteurs, $X^t(\tau)$, indiquant le nombre de fois où la transition t a été tirée à la date τ . On peut donc établir des équations d'évolution qui décrivent un cas d'étude comme le couplage d'un système \mathbb{Z}_{\min} linéaire et d'un système quasi $(+, \times)$ linéaire, portant sur les mêmes matrices. La quasi-linéarité provient du fait qu'à une date $\tau = \tau_1 + \tau_2$, $X^t(\tau)$ est égal au nombre de fois où la transition t a été tirée jusqu'à la date τ_1 , puis à partir de cette date jusqu'à la date τ_2 . On ne retrouve pas $X^t(\tau) = X^t(\tau_1) + X^t(\tau_2)$ car le deuxième terme de la somme nécessite un décalage. Cette équation n'est donc pas linéaire. Or, en supposant un routage aléatoire, on constate que l'espérance du nombre de fois où une transition est tirée à la date t est égale à la somme des espérances à la date t_1 et à la date t_2 . Ce qui confère donc bien une propriété de linéarité, mais *en l'espérance*. Une politique de routage dite « de course »⁴ est aussi présentée dans cette publication. Pour cette politique, quand un jeton arrive dans une place présentant une concurrence à la consommation, c'est la transition qui

3. traduction personnelle du terme “switching” utilisé dans ces publications en anglais

4. traduction personnelle du terme “race” utilisé dans ces articles en anglais

terminera le plus tôt qui remporte la « course » et qui consomme le jeton, au détriment des autres transitions.

Dans [CGQ98], les auteurs proposent une modélisation par récurrences polynomiales dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ de RdP (et non juste de GET), après simplification des phénomènes tels que la mort et la naissance de processus (correspondant aux valuations des arcs des RdP) ou des conflits qui peuvent exister dans ces RdP. Des politiques de routages statiques dépendantes de l'origine des jetons et de leur numérotation sont utilisées, ce qui permet d'aboutir à des équations récurrentes sur des compteurs pour des RdP temporisés pondérés continus (car leur approche est généralisée aux flux, c'est-à-dire en considérant des fractions de jetons). Quand la politique de routage ne dépend que de la numérotation des jetons, les équations obtenues sont similaires à celles de [BFG96], ces dernières se trouvant dans un contexte stochastique.

Il est proposé dans [Lib96, Section II.2.5] une contribution basée sur l'étude de [CGQ98]⁵ ainsi que sur celle de Loiseau et Wagneur [LW94]. Dans cette dernière publication, des systèmes d'équations $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ sont proposés, en se basant uniquement sur la structure du RdP et sans considérer de politique de routage particulière ; les relations obtenues sont non linéaires, mais plus simples que celles de [BCG91] et [BCOQ92]. L'étude des conflits structurels de Laurent Libeaut se base sur les équations de conservation aux nœuds des réseaux, semblables aux lois de Kirchhoff⁶. Le fonctionnement de tout réseau de Petri ordinaire est ainsi décrit par un système d'équations et d'inéquations, basées sur des applications non décroissantes de \mathbb{N} vers $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, représentant le nombre de jetons d'une place qui peuvent contribuer au tir d'une des transitions aval de cette place. Les inéquations de ce système sont définies dans le corps conventionnel et expriment les propriétés de conservation des jetons du RdP. Les équations, quant à elles, expriment, dans le dioïde $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \min, +)$, la politique de fonctionnement au plus tôt du RdP. De par la généralité des cas étudiés, il n'y a pas de garantie quant à l'unicité des solutions recherchées. Par ailleurs, pour un réseau de Petri de grande complexité, il transparaît que les équations proposées n'ont pas encore été exploitées en pratique.

Récapitulatif

Nous avons résumé dans le tableau 3.1 les données principales liées aux approches présentées dans notre état de l'art.

Comparaisons avec notre approche

En premier lieu, la classe des réseaux de Petri utilisée par Guy Cohen et ses co-auteurs dans [CGQ98] n'est pas celle utilisée pour nos cas d'études ; en particulier, nos systèmes sont de type discret et nous n'abordons pas le cas des pondérations sur les arcs. De leur côté, les écrits de François Baccelli et ses différents co-auteurs, dont [BCG91, BCOQ92] et [BFG96], présentent des approches basées sur des politiques de routage pouvant être dynamiques, mais les équations d'état obtenues ne sont jamais totalement linéaires, quelle que soit l'approche présentée. Nous avons préféré nous attacher à définir des modèles linéaires, basés sur une analyse par intervalles, dont les bornes sont déterministes.

5. car ce document était déjà pré-publié et disponible dès août 1995

6. ou plus communément appelées « lois des nœuds »

Publications	Forme des RdP étudiés	Type de la politique de routage	Forme de la représentation d'état
[BCG91] et [BCOQ92]	Quelconque	Routage dynamique (par commutation)	Non linéaire dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$, car l'équation principale repose sur un partitionnement
[BCG91] et [BCOQ92]	Quelconque	Gestion dynamique d'une file d'attente FIFO (compétition)	Certains cas sont non déterministes
[BFG96]	Réseaux de Petri à choix libres	Dynamique, car basée sur les temps restants des tirs des transitions	Ensemble d'équations linéaires et « quasi linéaires »
[CGQ98]	Réseaux de Petri temporisés pondérés continus	Routage statique	Équations linéaires dans $\mathbb{R}_{\min, \times}$
[Lib96]	Quelconque	Pas de politique particulière	Ensemble d'équations dans $\mathbb{N}_{+, \times}$ et d'inéquations dans $\overline{\mathbb{N}}_{\min, +}$. Pas de garantie de l'unicité des solutions.

TAB. 3.1 – Récapitulatif des approches utilisant des réseaux de Petri pour l'étude des routages

Par ailleurs, nous ne pouvons pas appliquer la politique de routage présentée dans [BFG96] car, contrairement à l'hypothèse qui y est faite, nous considérons que les tirs des transitions sont instantanés. Pour finir, l'approche proposée par Laurent Libeaut dans sa thèse permet de modéliser la concurrence, mais sans proposer de routage pour lever les conflits [Lib96], ce qui ne correspond pas à notre approche, où un routage est proposé.

3.2 Une borne inférieure pour le comportement du système global

Notre modèle repose sur le calcul de deux bornes d'un intervalle de comportements englobant celui du système étudié. La première étape consiste à calculer la borne inférieure de cet intervalle. On montre dans cette section que l'addition termes à termes des réponses impulsives des sous-systèmes composant un SdP est toujours un minorant du comportement entrée-sortie de ce système, quelle que soit sa politique de routage intrinsèque.

La proposition suivante introduit une borne inférieure pour le comportement entrée-sortie de 2 systèmes parallèles en conflit sur les entrées.

Proposition 3. Soient les fonctions compteur h_1, h_2, u_1 et $u_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$, l'inégalité suivante est toujours satisfaite :

$$(h_1 \odot h_2) * (u_1 \odot u_2) \preceq (h_1 * u_1) \odot (h_2 * u_2). \quad (3.5)$$

Démonstration : Comparons les deux membres de cette inégalité, $\forall t \in \mathbb{Z}$. Concernant le membre de gauche, par définition du produit de convolution⁷ nous avons

$$((h_1 \odot h_2) * (u_1 \odot u_2))(t) = \bigoplus_{t=t_1+t_2} (h_1(t_1) \otimes h_2(t_1) \otimes u_1(t_2) \otimes u_2(t_2)).$$

En développant le membre de droite, nous obtenons :

$$((h_1 * u_1) \odot (h_2 * u_2))(t) = \left(\bigoplus_{t=t_1+t_2} h_1(t_1) \otimes u_1(t_2) \right) \otimes \left(\bigoplus_{t=t_1+t_2} h_2(t_1) \otimes u_2(t_2) \right).$$

En considérant que la variable t peut prendre un nombre fini n de valeurs, $((h_1 \odot h_2) * (u_1 \odot u_2))(t)$ correspond donc au minimum des n sommes possibles de 4 termes, et $((h_1 * u_1) \odot (h_2 * u_2))(t)$ peut être réécrit comme la somme du minimum de ces 4 termes, pris 2 à 2. Ainsi, par définition de l'opération min, on sait que la deuxième expression est plus grande que la première (au sens de la relation d'ordre définie dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$, cf. la remarque 6 à la page 23).⁸ \square

Remarque 30. Quand $u_1 = u_2 = e$ (e étant ici la fonction compteur $e(t) = e = 0$ pour $t < 0$ et $e(t) = \varepsilon = +\infty$ autrement), le cas limite de l'égalité de la relation (3.5) est atteint; on a $(h_1 \odot h_2) * (u_1 \odot u_2) = (h_1 \odot h_2) * e = (h_1 * e) \odot (h_2 * e)$. En d'autres termes, la réponse impulsionnelle du système global correspondant est $h_1 \odot h_2$ dans ce cas précis.

La proposition suivante est une généralisation de la proposition 3, et donne une caractérisation de la borne inférieure du comportement entrée-sortie d'un système dont l'entrée est aiguillée vers un nombre quelconque de sous-systèmes le constituant.

Proposition 4. Pour un système h dont les n sous-systèmes sont linéaires et liés par un parallélisme disjonctif, quelle que soit la fonction de routage, nous avons

$$y \succ (h_1 \odot h_2 \odot \cdots \odot h_n) * u.$$

Démonstration : C'est une extension directe de la proposition 3, en utilisant la propriété 1 de la page 56 concernant l'associativité de \odot . \square

Il est aussi possible de considérer le comportement entrée-sortie de systèmes globaux via leur fonction de transfert, dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$. Comme nous avons pu le constater dans la section 2.2.3, les dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$ sont isomorphes. On peut donc affirmer que l'inf-convolution de $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$ correspond au produit de séries dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$ (qui est parfois appelé « produit de Cauchy », pour le distinguer du produit dit « de Hadamard » [Gau93]).

7. cf. la définition 61, de l'annexe A.2

8. il est à noter que la preuve d'une proposition similaire dans $\mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ peut être trouvée pour le lemme 6.2.1 de [Gau93, page 27]

Remarque 31. Le produit de Hadamard s'applique aussi aux séries formelles. Ainsi, dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$, l'opération \odot est définie comme suit :

$$a(\delta) \odot b(\delta) = \bigoplus_{t=0}^{+\infty} (a(t) \otimes b(t)) \delta^t.$$

On constate donc que le produit de Hadamard de deux séries correspond à la somme termes à termes (au sens du corps conventionnel) des coefficients de ces séries.

Exemple 22. Considérons par exemple les deux sous-systèmes dont les fonctions de transfert sont exprimées par les séries suivantes dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$:

$$h_1(\delta) = \delta^4(2\delta^3)^* \text{ et } h_2(\delta) = (\delta^5 \oplus 2\delta^6)(4\delta^4)^*.$$

Pour cet exemple, nous pouvons calculer

$$h_1(\delta) \odot h_2(\delta) = (\delta^4 \oplus 2\delta^5 \oplus 4\delta^6 \oplus 6\delta^7 \oplus 8\delta^9 \oplus 10\delta^{10} \oplus 14\delta^{13} \oplus 18\delta^{14})(20\delta^{12})^*.$$

La proposition 4 nous informe que la sortie $y(\delta)$ du système global est nécessairement plus grande que $(h_1(\delta) \odot h_2(\delta)) \otimes u(\delta)$. Le comportement entrée-sortie de ce système ne peut donc pas être plus rapide que le système équivalent à $h_1(\delta) \odot h_2(\delta)$.

Ceci peut s'interpréter graphiquement à l'aide de la figure 3.5. On constate que la série résultant de l'évaluation de l'expression $h_1(\delta) \odot h_2(\delta)$ correspond à la somme des événements réalisés par les différents sous-systèmes à chaque instant t . En quelque sorte, on considère que les 2 sous-systèmes mis en parallèles travaillent en permanence au maximum de leur capacité. C'est pourquoi le système global correspondant ne peut physiquement pas produire plus⁹.

Nous allons voir dans la section suivante que l'ensemble des comportements majorant le comportement effectif du système global est dépendant de la politique de routage utilisée.

3.3 Un majorant pour le comportement du système global

Nous avons montré dans la section précédente que le produit de Hadamard des fonctions compteur de sous-systèmes en conflit est une borne inférieure pour le comportement entrée-sortie du système les englobant, quelle que soit la politique de routage utilisée. Nous allons maintenant considérer l'influence de ces fonctions de routage.

Nous considérons trois cas possibles. Lorsque les sous-systèmes sont identiques et que le routage est équilibré, on constate que le comportement entrée-sortie du système global revient à multiplier celui de l'un des sous-systèmes par le nombre de ces sous-systèmes identiques mis en parallèles. On obtient donc une représentation exacte du système global. Lorsque les sous-systèmes sont

9. en se rappelant que la relation d'ordre dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$ est l'opposée de celle définie dans le corps usuel, ceci correspond bien au fait que cette série constitue une borne inférieure

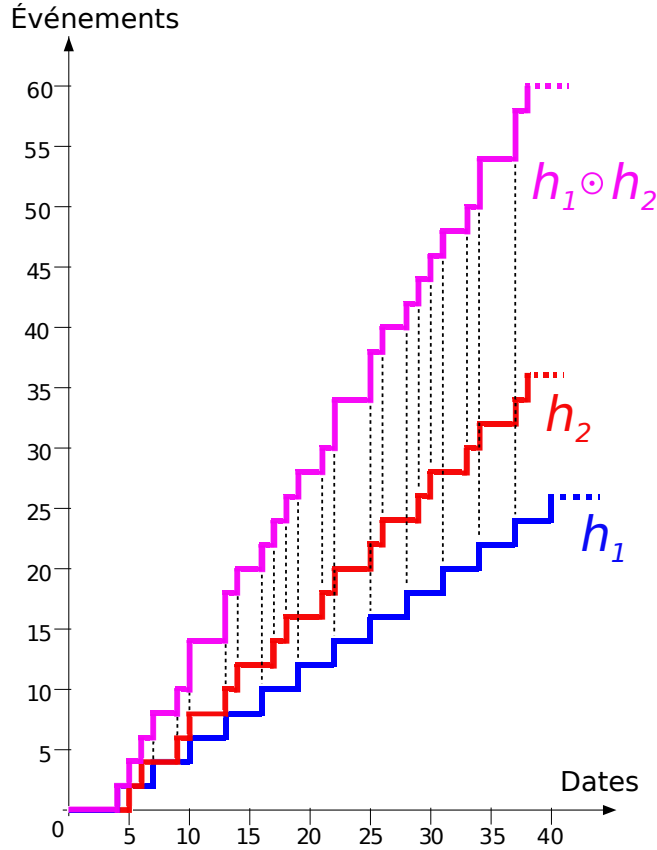


FIG. 3.5 – Interprétation graphique du produit de Hadamard de séries de $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$

différents et pour des politiques de routage équilibrées ou périodiques, il n'est plus possible d'obtenir de représentation exacte et linéaire du système. Cependant on pourra définir une fonction de transfert supérieure à celle caractérisant le système considéré. Comme il n'est pas garanti que ce transfert sera jamais atteint, il consiste en un majorant et non en une borne supérieure. Comme il n'est pas garanti que ce transfert sera jamais atteint, il constitue un majorant et non une borne supérieure. On obtiendra en conséquence les deux extrêmes d'un intervalle incluant la fonction de transfert recherchée.

3.3.1 Routage équilibré entre sous-systèmes identiques

Définissons l'application de changement d'échelle, qui sera utile tout au long de cette section.

Définition 53 (Application de changement d'échelle). *Soient une application compteur $x \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$ et un scalaire $n \in \mathbb{N}$. L'application de changement d'échelle est définie par $\text{Ech}_n : \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}, x \mapsto n \times x$.*

Remarque 32. *Si l'on considère la représentation graphique d'une série dans*

$\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$ (car $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$ sont isomorphes, via la transformée en δ présentée dans la section 2.2.3), la multiplier par un entier naturel revient à effectuer un changement d'échelle de l'axe des ordonnées, correspondant aux événements réalisés.

Ceci peut être représenté par la figure 3.6. On y constate que la série $\text{Ech}_2(h_1)$ correspond au fait de doubler le nombre d'événements à chaque instant d'observation, comme si l'échelle de l'axe événementiel avait été divisée par 2. Dans le cadre des réseaux de Petri, un tel changement d'échelle revient à démultiplier tous les jetons du marquage initial de ce RdP en fonction du coefficient de changement d'échelle.

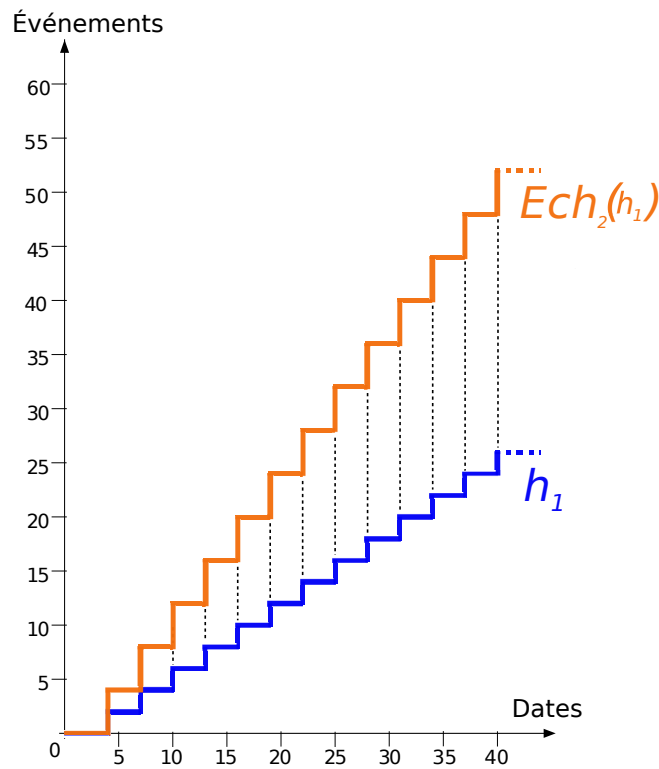


FIG. 3.6 – Interprétation graphique du changement d'échelle d'une série de $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$

Propriété 4. Quand on ne considère que des sous-systèmes identiques, au nombre de n et à la réponse impulsionnelle h , et une politique de routage équilibrée, il est possible de faire une analogie entre le produit de Hadamard et l'application de changement d'échelle. En effet, dans ce cas

$$\bigodot_{i=1}^n h = \text{Ech}_n(h).$$

Démonstration : Par définition du produit de Hadamard et de l'application

de changement d'échelle, nous avons d'un côté

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{Z}, \left(\bigodot_{i=1}^n h \right)(t) &= \underbrace{h(t) \otimes h(t) \otimes \cdots \otimes h(t)}_{n \text{ fois}} \\ &= \bigotimes_{i=1}^n h(t) = \sum_{i=1}^n h(t) \\ &= n \times h(t), \end{aligned}$$

et de l'autre

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{Z}, (\text{Ech}_n(h))(t) &= \text{Ech}_n(h(t)) \\ &= n \times h(t). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure. \square

Le résultat suivant donne une caractérisation du comportement d'un système englobant deux sous-systèmes identiques et dont la fonction de routage est $r = 1|1$.

Proposition 5. *Le comportement entrée-sortie du système $(h|h)_{1|1}$ est linéaire et sa réponse impulsionnelle est $\text{Ech}_2(h)$.*

Démonstration : Pour les besoins de cette démonstration, nous considérons les sous-systèmes dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$. Le produit $*$ représente donc ici une sup-convolution entre applications dateur.

$$\begin{aligned} y_1(k) &= (h * u_1)(k) \\ &= \bigoplus_{i=0}^k h(i) \otimes u_1(k-i) \\ y_2(k) &= (h * u_2)(k) \\ &= \bigoplus_{i=0}^k h(i) \otimes u_2(k-i) \end{aligned}$$

Comme la fonction de routage utilisée est équilibrée (c'est-à-dire $1|1$), on a

$$u(2k) = u_1(k) \text{ et } u(2k+1) = u_2(k).$$

On sait aussi que $\forall k \in \mathbb{Z}, u_1(k) \preceq u_2(k) \preceq u_1(k+1)$. Puisque le produit de convolution est isotone (cf. la propriété 7 à la page 137), on obtient $\forall k$:

$$h * u_1(k) \preceq h * u_2(k) \preceq h * u_1(k+1)$$

Soit $y_1(k) \preceq y_2(k) \preceq y_1(k+1)$, et finalement

$$y(2k) = y_1(k) \text{ et } y(2k+1) = y_2(k).$$

Nous pouvons alors écrire pour les événements pairs

$$\begin{aligned}
 y(2k) &= \bigoplus_{i=0}^k h(i) \otimes u_1(k-i) \\
 &= h(0) \otimes u_1(k) \oplus h(1) \otimes u_1(k-1) \oplus \dots \\
 &= h(0) \otimes u(2k) \oplus h(1) \otimes u_1(2(k-1)) \oplus \dots \\
 &= \bigoplus_{i=0}^k h(i) \otimes u(2(k-i)),
 \end{aligned}$$

et pour les événements impairs

$$\begin{aligned}
 y(2k+1) &= h(0) \otimes u_2(k) \oplus h(1) \otimes u_2(k-1) \oplus \dots \\
 &= \bigoplus_{i=0}^k h(i) \otimes u(2(k-i)+1).
 \end{aligned}$$

En conclusion, pour tout K pair ou impair, la relation suivante est vérifiée :

$$y(K) = \bigoplus_{i=0}^K h(i) \otimes u(K-2i), \quad (3.6)$$

ce qui montre que le système global est linéaire dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ (la sortie se présente comme une sup-convolution d'une application dateur par l'entrée).

Cherchons maintenant à caractériser la réponse impulsionnelle de ce système, permettant d'obtenir y comme une fonction de u . Soit l'application suivante :

$$h'(j) = \begin{cases} h(j/2) & \text{quand } j \text{ est pair,} \\ \varepsilon & \text{quand } j \text{ est impair.} \end{cases}$$

En injectant h' dans l'équation (3.6), la (sup-) convolution suivante est aussi vérifiée :

$$y(K) = \bigoplus_{i=0}^K h'(i) \otimes u(K-i).$$

$y(K)$ est de ce fait une somme de K termes, dont la moitié sont nuls au sens de $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$. Ces derniers sont de la forme $\varepsilon \otimes u(k-j-1)$, avec j impair. Or si j est pair, $h'(j) = h(j/2)$, par définition de h' . Donc les termes non nuls sont de la forme $h(j/2) \otimes u(k-j)$, pour tout j pair. Par ailleurs, l'application dateur u est croissante par définition. Ainsi, l'équation (3.6) est aussi équivalente à

$$y(K) = \bigoplus_{i=0}^K h''(i) \otimes u(K-i).$$

où h'' est définie par

$$h''(j) = \begin{cases} h(j/2) & \text{quand } j \text{ est pair,} \\ h(\frac{j+1}{2}) & \text{quand } j \text{ est impair.} \end{cases} \quad (3.7)$$

En effet, les termes de h'' n'interviennent pas dans la somme quand j est impair (car ces termes sont de la forme $h(j/2) \otimes u(k-j-1)$ et sont inférieurs aux termes de la forme $h(j/2) \otimes u(k-j)$; ils ne sont donc pas considérés, par définition de la loi \oplus de $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$). La sémantique de la définition h'' , explicitée par la relation (3.7), est qu'à chaque instant j considéré, deux événements consécutifs, de l'un des sous-systèmes, dont la réponse impulsionnelle est h , surviennent de manière simultanée (les dates des événements $h(j/2)$ et $h(\frac{j+1}{2})$ sont égales). On constate donc que la réponse impulsionnelle h'' du système global correspond au double de celle de l'un des sous-systèmes identiques le constituant, ce qui nous donne $h'' = \text{Ech}_2(h) = h \odot h$.

On remarque ainsi que la représentation de h' en tant que dateur correspond à $2 \times h$ en représentation compteur (dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$). \square

En étendant la preuve à n sous-systèmes équivalents, on trouve le résultat suivant.

Proposition 6. *Un système $(h|h| \dots |h)_{1|1| \dots |1}$ composé de n sous-systèmes dont les réponses impulsionnelles sont h et dont la fonction de routage est $1|1| \dots |1$ a pour réponse impulsionnelle $\text{Ech}_n(h)$.*

Démonstration : Pour ce type de système, on a par hypothèse la relation suivante :

$$u_1(k) \preceq u_2(k) \preceq \dots \preceq u_n(k) \preceq u_1(k+1).$$

Le reste de la démonstration repose sur un raisonnement similaire à celui de la preuve de la proposition précédente. \square

L'exemple suivant illustre cette proposition.

Exemple 23. *Chaque sous-système de la figure 3.7 (a) possède pour fonction de transfert $h(\delta) = \delta^7(3\delta^2)^*$. Le système $(h|h)_{1|1}$ est lui aussi linéaire et sa fonction de transfert est $\text{Ech}_2(h) = \delta^7(6\delta^2)^*$. Le GET de la figure 3.7 (b) possède la même fonction de transfert. Il est important de constater que deux systèmes identiques mis en parallèle permettent de doubler la cadence du système global.*

Dans les sous-sections suivantes, nous allons considérer les cas où les systèmes globaux sont composés de sous-systèmes différents.

3.3.2 Routage équilibré entre sous-systèmes différents

Étudions en premier lieu le cas du routage équilibré, c'est-à-dire quand tous les sous-systèmes reçoivent le même nombre d'impulsions en entrée.

Proposition 7. *Dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$, le comportement d'un système $h = (h_1|h_2)_{1|1}$ est tel que*

$$(h_1 \odot h_2) * u \preceq h(u) \preceq \text{Ech}_2(h_1 \oplus h_2) * u.$$

Nous pouvons donc garantir l'existence d'un intervalle pour le comportement entrée-sortie du système h ,

$$(h_1|h_2)_{1|1} \in [h_1 \odot h_2, \text{Ech}_2(h_1 \oplus h_2)].$$

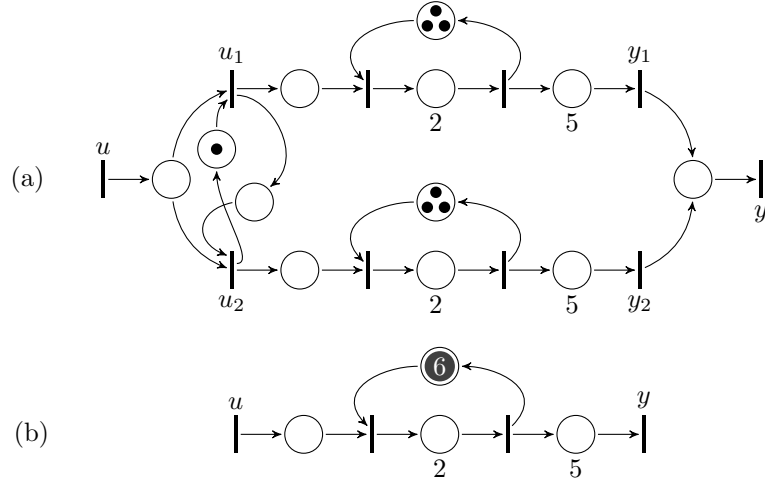


FIG. 3.7 – Équivalence entre $(h|h)_{1|1}$ (a) et $\text{Ech}_2(h)$ (b)

Démonstration : La proposition 3 nous permet de prouver l'inégalité de gauche. Par ailleurs, comme le produit de Hadamard \odot et le produit de convolution $*$ sont isotones (cf. les propriétés 3 et 7, respectivement pages 56 et 137), on obtient

$$h_1 * u_1 \preceq (h_1 \oplus h_2) * u_1 \text{ et } h_2 * u_2 \preceq (h_1 \oplus h_2) * u_2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} h(u) &= (h_1 * u_1) \odot (h_2 * u_2) \\ &\preceq ((h_1 \oplus h_2) * u_1) \odot ((h_1 \oplus h_2) * u_2). \end{aligned}$$

Pour un routage $1|1$, la proposition 6 nous indique que

$$\begin{aligned} (h_1 \oplus h_2) * u_1 \odot (h_1 \oplus h_2) * u_2 &= \text{Ech}_2(h_1 \oplus h_2) * (u_1 \odot u_2) \\ &= \text{Ech}_2(h_1 \oplus h_2) * u. \end{aligned}$$

□

Ce résultat, concernant deux systèmes linéaires présentant un parallélisme disjonctif géré par une politique de routage équilibrée, montre que le comportement du système les incluant peut être encadré par celui de deux systèmes linéaires. Il est possible de généraliser cette proposition pour un nombre quelconque de sous-systèmes en parallèle.

Proposition 8. Soient n sous-systèmes h_i et une fonction de routage $r = 1|1| \cdots |1$ associée. On a

$$\bigodot_{i=1}^n h_i \preceq (h_1|h_2|\cdots|h_n)_{1|1|\cdots|1} \preceq \text{Ech}_n\left(\bigoplus_{i=1}^n h_i\right),$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$(h_1 \odot \cdots \odot h_n) * u \preceq (h_1|h_2|\cdots|h_n)_{1|1|\cdots|1} * u \preceq \text{Ech}_n(h_1 \oplus \cdots \oplus h_n) * u.$$

Démonstration : La démonstration est similaire à celle de la proposition précédente, en utilisant cette fois-ci le résultat de la proposition 4. \square

3.3.3 Routage périodique entre deux sous-systèmes différents

Cette partie porte sur les routages périodiques de type $n|m$, avec $n, m \in \mathbb{N}^+$. La résiduée duale de l'application de changement d'échelle joue un rôle prépondérant dans les calculs présentés. C'est pourquoi nous renvoyons le lecteur à la section 1.2.3 ou aux ouvrages [BJ72, BCOQ92] pour obtenir un rappel sur la théorie de la résiduation.

Proposition 9. *L'application Ech_n est dualement résiduable et sa résiduée duale est définie comme suit :*

$$\text{Ech}_n^b(x) = \lceil x/n \rceil.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que l'application Ech_n satisfait

$$\text{Ech}_n(a \wedge b) = \text{Ech}_n(a) \wedge \text{Ech}_n(b).$$

En particulier, si a et b sont solutions de $\text{Ech}_n(x) \succcurlyeq y$, on constate que leur borne inférieure est aussi une solution. Par généralisation, la borne inférieure de toutes les solutions de $\text{Ech}_n(x) \succcurlyeq y$ est nécessairement une solution elle aussi ; elle en est plus précisément la plus petite, selon la définition de la relation d'ordre canonique (cf. la section 1.1.3). Comme cette plus petite solution existe, on peut affirmer d'après le théorème 7 à la page 28 que Ech_n est dualement résiduable.

Par ailleurs, il apparaît clairement que le plus petit x tel que $n \times x \succcurlyeq y$ correspond à l'arrondi à l'entier supérieur de la division de y par n . \square

Remarque 33. *D'après l'inégalité (1.2b) de la page 28, la relation suivante est satisfaite :*

$$\text{Ech}_n(\text{Ech}_n^b(b)) \succcurlyeq b.$$

Exemple 24. *Considérons un système de transfert décrit par la série périodique suivante dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$:*

$$b = \delta^1 \oplus 1\delta^2 \oplus 3\delta^5(1\delta^1)^*.$$

La réponse impulsionnelle exprimée par une application compteur donne

$$\begin{aligned} b_c(0) &= 0, b_c(1) = 1, b_c(2) = 3, b_c(3) = 3, b_c(4) = 3 \\ b_c(5) &= 4, b_c(6) = 5, b_c(7) = 6, \dots \end{aligned}$$

L'application $\text{Ech}_2^b(b) = \lceil \frac{1}{2} \times b \rceil$ est décrite par la série formelle $\delta^1 \oplus 1\delta^2 \oplus 2\delta^6(1\delta^2)^$.*

On constate alors effectivement que

$$\text{Ech}_2(\text{Ech}_2^b(b)) = \delta^1 \oplus 2\delta^2 \oplus 4\delta^6(2\delta^2)^* \succcurlyeq b.$$

Proposition 10. *Un système $h = (h_1|h_2)_{m|n}$ est tel que*

$$h \in \left[h_1 \odot h_2, \text{Ech}_{m+n}(\text{Ech}_m^b(h_1) \oplus \text{Ech}_n^b(h_2)) \right]. \quad (3.8)$$

Démonstration : La proposition 6 nous fournit les équivalences suivantes.

– Un système $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ linéaire dont la réponse impulsionnelle est $\text{Ech}_m(h_1)$ est équivalent au système $\underbrace{(h_1|\dots|h_1)}_{m \text{ fois}} \underbrace{1|\dots|1}_{m \text{ fois}}$.

– De même, un système $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ linéaire $\text{Ech}_n(h_2)$ est équivalent au système $\underbrace{(h_2|\dots|h_2)}_{n \text{ fois}} \underbrace{1|\dots|1}_{n \text{ fois}}$.

Nous pouvons ainsi formuler l'égalité suivante

$$(\text{Ech}_m(h_1)|\text{Ech}_n(h_2))_{m|n} = \underbrace{(h_1|\dots|h_1)}_{m \text{ fois}} \underbrace{(h_2|\dots|h_2)}_{n \text{ fois}} \underbrace{1|1|\dots|1}_{m+n \text{ fois}}.$$

En d'autres termes, on peut transformer un routage $m|n$ entre deux sous-systèmes en un routage $1|\dots|1$ avec $m+n$ sous-systèmes. En utilisant la remarque 33, les inégalités

$$h_1 \preceq \text{Ech}_m(\text{Ech}_m^b(h_1)) \text{ et } h_2 \preceq \text{Ech}_n(\text{Ech}_n^b(h_2)).$$

nous conduisent à

$$\begin{aligned} (h_1|h_2)_{m|n} &\preceq \left(\text{Ech}_m(\text{Ech}_m^b(h_1)) | \text{Ech}_n(\text{Ech}_n^b(h_2)) \right)_{m|n} \\ &\preceq \underbrace{(\text{Ech}_m^b(h_1)|\dots|\text{Ech}_m^b(h_1))}_{m \text{ fois}} \underbrace{(\text{Ech}_n^b(h_2)|\dots|\text{Ech}_n^b(h_2))}_{n \text{ fois}} \underbrace{1|1|\dots|1}_{m+n \text{ fois}}. \end{aligned}$$

La proposition 8 permet de terminer la démonstration. \square

Exemple 25. *Considérons deux sous-systèmes dont les fonctions de transfert dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[\delta]$ sont respectivement $h_1 = \delta^2(2\delta^3)^*$ et $h_2 = \delta^5(2\delta^6)^*$. Supposons l'utilisation d'un routage périodique $2|1$.*

On trouve comme borne inférieure de son comportement

$$h_1 \odot h_2 = (\delta^2 \oplus 2\delta^5)(6\delta^6)^*.$$

Par ailleurs,

$$\text{Ech}_2^b(h_1) = \delta^2(1\delta^3) \quad \text{et}$$

$$\text{Ech}_1^b(h_2) = h_2 = \delta^5(2\delta^6).$$

Ce qui nous donne pour le calcul du majorant

$$\text{Ech}_3(\text{Ech}_2^b(h_1) \oplus \text{Ech}_1^b(h_2)) = \delta^5(6\delta^6)^*$$

En résumé, le comportement combiné $(h_1|h_2)_{2|1}$ des sous-systèmes h_1 et h_2 en parallélisme disjonctif (cf. la figure 3.1 (b)) est compris dans un intervalle, et satisfait la relation d'appartenance suivante :

$$(h_1|h_2)_{2|1} \in [(\delta^2 \oplus 2\delta^5)(6\delta^6)^*, \delta^5(6\delta^6)^*].$$

3.4 Routage périodique optimal entre deux sous-systèmes différents

Nous avons vu dans la section précédente comment modéliser linéairement dans un dioïde d'intervalles des phénomènes de routage. Il apparaît donc, dans le cas d'une politique de routage périodique, que la taille des lots à envoyer en entrée de chacun des sous-systèmes influe sur le comportement du système global correspondant, et donc aussi sur ses comportements extrémaux, servant de bornes à l'intervalle des comportements possibles. En particulier, on peut affirmer que, si les deux comportements aux bornes ont la même cadence, alors la taille de l'intervalle, c'est-à-dire l'approximation, est minimale.

Il est réputé que les réponses impulsionnelles des systèmes linéaires dans un dioïde (comme ici $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$) sont ultimement périodiques [CMQV89] (cf. la définition 50 de la page 64). Il est donc possible, en étudiant les valeurs de leurs pentes asymptotiques, d'émettre des assertions quant à leurs cadences de production. Cette approche est en particulier applicable aux réponses impulsionnelles aux bornes de l'intervalle de comportements représentant un système. Mais avant de pouvoir étudier les pentes asymptotiques de ces réponses impulsionnelles, il est nécessaire d'énoncer quelques propriétés concernant les calculs de ces pentes asymptotiques, quand interviennent le produit de Hadamard ou l'application de changement d'échelle.

Propriété 5. Soient $h_1, h_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$ deux applications ultimement périodiques. Alors

$$\sigma(h_1 \odot h_2) = \sigma(h_1) + \sigma(h_2), \quad (3.9)$$

$$\sigma(\text{Ech}_n(h)) = n \times \sigma(h), \quad (3.10)$$

$$\sigma(\text{Ech}_n^b(h)) = \left\lceil \frac{\sigma(h)}{n} \right\rceil. \quad (3.11)$$

Démonstration : En se référant aux définitions 43 et 53 (pages 56 et 87), les démonstrations sont triviales. \square

Proposition 11. La politique de routage $r = m|n$, avec $\frac{m}{n} = \frac{\sigma(h_1)}{\sigma(h_2)}$ permet d'obtenir une approximation minimale du comportement entrée-sortie du système où s'effectue ce routage. Ceci se caractérise par la relation $\sigma(h_1 \odot h_2) = \sigma(\text{Ech}_{m+n}(\text{Ech}_m^b(h_1) \oplus \text{Ech}_n^b(h_2)))$.

Démonstration : Tout d'abord, sachant que $\frac{m}{n} = \frac{\sigma(h_1)}{\sigma(h_2)}$, on trouve $\frac{\sigma(h_1)}{m} = \frac{\sigma(h_2)}{n}$ et $\sigma(h_1) = \frac{m \times \sigma(h_2)}{n}$.

Cherchons maintenant à caractériser, uniquement en termes de pentes asymptotiques et de tailles des lots du routage périodique, le membre de gauche de la relation. On a

$$\begin{aligned} \sigma(h_1 \odot h_2) &= \sigma(h_1) + \sigma(h_2) && \text{en reprenant l'équation (3.9)} \\ &= \frac{m \times \sigma(h_2)}{n} + \sigma(h_2) \\ &= \frac{(m+n) \times \sigma(h_2)}{n}. \end{aligned}$$

Par application de la relation (3.11), on trouve $\sigma(\text{Ech}_m^b(h_1)) = \sigma(\text{Ech}_n^b(h_2)) = \frac{\sigma(h_1)}{m} = \frac{\sigma(h_2)}{n}$.

Ce qui nous donne

$$\sigma(\text{Ech}_{m+n}(\text{Ech}_m^b(h_1) \oplus \text{Ech}_n^b(h_2))) = \frac{(m+n) \times \sigma(h_1)}{m} = \frac{(m+n) \times \sigma(h_2)}{n}.$$

On constate que les deux membres de la relation de la proposition 11 sont égaux, ce qui conclut la démonstration. \square

Il est par conséquent possible de choisir une fonction de routage telle que les bornes de l'intervalle (3.8) aient la même pente asymptotique. En paramétrant cette fonction de routage, on obtient la meilleure cadence, tout en réduisant l'incertitude liée à la modélisation par intervalles.

3.5 Cas d'application

Considérons un atelier flexible possédant deux lignes de production parallèles dont les entrées et les sorties respectives sont u_1 , u_2 , y_1 et y_2 , comme présenté dans la figure 3.8. Ces deux sous-systèmes peuvent être décrits selon leurs fonctions de transfert dans $\mathbb{Z}_{\min}[\delta]$ comme suit :

$$h_1(\delta) = \delta^4(2\delta^3)^* \text{ et } h_2(\delta) = (\delta^5 \oplus 2\delta^6)(4\delta^4)^*.$$

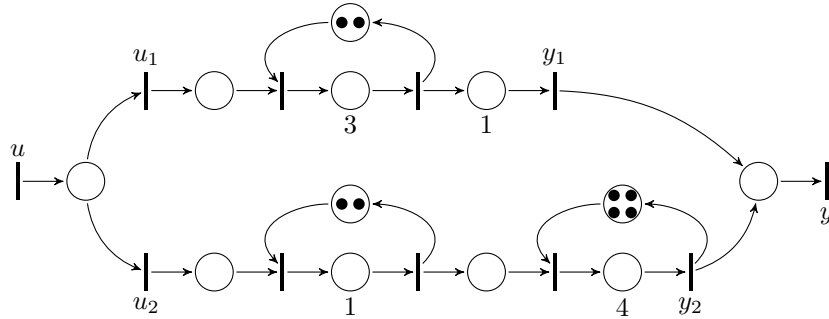


FIG. 3.8 – Un atelier flexible possédant un routage en son sein

Pour les deux sous-systèmes considérés, on a les cadences suivantes :

$$\sigma(h_1) = 2/3 \text{ et } \sigma(h_2) = 1.$$

La fonction de routage optimal $r = m|n$ est celle pour laquelle $\frac{m}{n} = \frac{\sigma(h_1)}{\sigma(h_2)}$. On trouve ainsi $m = 2$ et $n = 3$.

D'après la propriété 5 et la proposition 11, la cadence du système global est la même pour tous les comportements possibles de ce système (auquel on attribue la fonction de routage $2|3$). Par calcul, on trouve

$$\sigma((h_1|h_2)_{2|3}) = \sigma(h_1 \odot h_2) = \sigma(h_1) + \sigma(h_2) = 5/3.$$

Cherchons maintenant à caractériser les comportements extrémaux de l'intervalle des possibles. Soit \mathbf{h} la fonction de transfert du système global, nous savons qu'elle est incluse dans l'intervalle

$$[\underline{h}, \bar{h}] = [h_1 \odot h_2, \text{Ech}_5(\text{Ech}_2^b(h_1) \oplus \text{Ech}_3^b(h_2))].$$

La borne inférieure \underline{h} a déjà été calculée dans l'exemple 22 de la page 86 :

$$\underline{h} = h_1 \odot h_2 = (\delta^4 \oplus 2\delta^5 \oplus 4\delta^6 \oplus 6\delta^7 \oplus 8\delta^9 \oplus 10\delta^{10} \oplus 14\delta^{13} \oplus 18\delta^{14})(20\delta^{12})^*.$$

Afin de calculer la borne supérieure \bar{h} , il nous faut les valeurs de $\text{Ech}_2^b(h_1)$ et de $\text{Ech}_3^b(h_2)$. On obtient comme résultats

$$\begin{aligned} \text{Ech}_2^b(h_1) &= \delta^4(1\delta^3)^* && \text{et} \\ \text{Ech}_3^b(h_2) &= (\delta^6 \oplus 1\delta^9 \oplus 2\delta^{13} \oplus 3\delta^{14})(4\delta^{12})^*. \end{aligned}$$

Ainsi dans notre cas, $\text{Ech}_3^b(h_2) \succ \text{Ech}_2^b(h_1)$, ce qui nous permet de calculer \bar{h} , à savoir

$$\bar{h} = \text{Ech}_5(\text{Ech}_3^b(h_2)) = (\delta^6 \oplus 5\delta^9 \oplus 10\delta^{13} \oplus 15\delta^{14})(20\delta^{12})^*.$$

Pour cet exemple, pour tout signal d'entrée u , la sortie $(h_1|h_2)_{2|3}(u)$ est supérieure à $\underline{h} * u$ et inférieure à $\bar{h} * u$. La figure 3.9 propose une représentation graphique des applications compteur \underline{h} et \bar{h} . Nous pouvons constater que la borne inférieure \underline{h} est bien le comportement le plus rapide, dans le sens où les cadences sont les mêmes mais certains produits seront réalisés un peu plus tôt par le système que représente cette application. La zone grisée correspond aux incertitudes liées au routage.

Pour ce cas d'application, l'amplitude d'approximation (le plus grand écart entre les deux bornes de l'intervalle) est de 4 produits réalisés à 3 unités de temps d'écart.

3.6 Bilan

Grâce au dioïde des intervalles, présenté dans [LS01, LHCJ04], certains systèmes non linéaires dans les dioïdes de scalaires peuvent être décrits par des intervalles dont les bornes sont linéaires. Cette approche permet d'utiliser les résultats de la théorie des dioïdes sur ces bornes, aboutissant à l'étude analytique de ces systèmes (qui sont généralement étudiés par simulation, pour cause de trop grande complexité).

Nous avons montré l'existence de deux systèmes linéaires permettant d'encadrer le comportement d'un système mono-entrée/mono-sortie composé de plusieurs sous-systèmes parallèles en conflit sur la même entrée, à condition d'utiliser une fonction de routage « périodique » ou « équilibrée » entre ces sous-systèmes. L'ensemble des formes possibles pour ces deux bornes a été regroupé dans le tableau 3.2.

Dans le contexte de la gestion de production, il est possible de choisir un routage garantissant au système global une cadence donnée et tel que l'incertitude d'approximation liée à l'analyse par intervalles soit minimale.

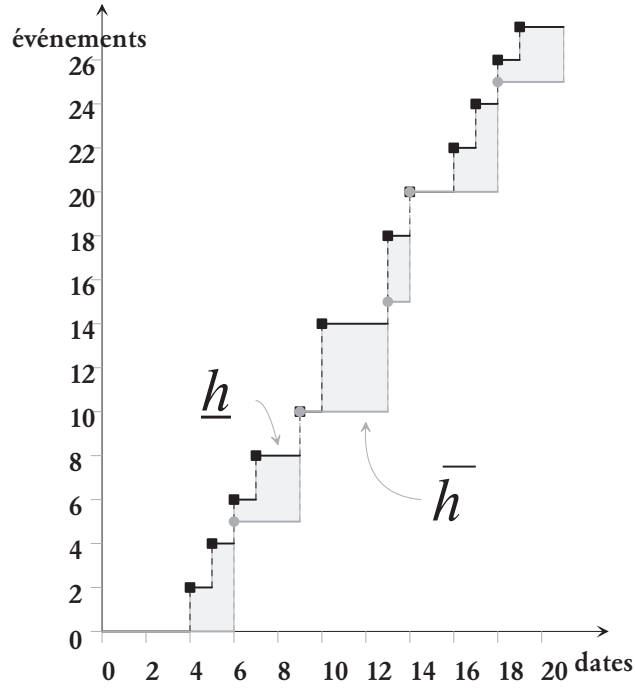


FIG. 3.9 – Réponse impulsionnelle des deux bornes de l'intervalle

Type de sous-systèmes	Type de routage	Réponse impulsionnelle	
n sous-systèmes identiques ($h h \dots h$)	Routage équilibré $1 1 \dots 1$	$\odot_{i=0}^n h = \text{Ech}_n(h)$	
		Borne inférieure	Majorant
n sous-systèmes différents ($h_1 h_2 \dots h_n$)	Routage équilibré $1 1 \dots 1$	$\odot_{i=0}^n h_i$	$\text{Ech}_n\left(\bigoplus_{i=0}^n h_i\right)$
2 sous-systèmes différents ($h_1 h_2$)	Routage périodique $n m$		$\text{Ech}_{m+n}(\text{Ech}_m^b(h_1) \oplus \text{Ech}_n^b(h_2))$

TAB. 3.2 – Récapitulatif de la caractérisation du comportement d'un routage

Comme nous avons pu le constater, la politique de routage a une certaine influence sur le comportement des systèmes concernés. Nous allons voir dans le chapitre suivant des systèmes présentant des conflits de type ressources partagées. En utilisant une politique d'affectation dynamique des ressources bien particulière, leurs modélisations peuvent aussi être réalisées par le biais d'une analyse par intervalles.

Chapitre 4

Modélisation de systèmes de production à ressources partagées

Nous avons vu dans le chapitre précédent une première forme de conflits, basés sur des routages de produits entre plusieurs sous-systèmes, et étudié l'influence de ces premiers sur le comportement du système global. Nous abordons dans ce chapitre une deuxième forme de conflits, à savoir le partage de ressources. Ainsi, ce ne sont plus les produits qui sont orientés selon leurs gammes respectives, mais les ressources qui sont affectées à l'un ou l'autre des sous-systèmes en concurrence. Cette différence fondamentale impose l'utilisation d'une autre approche de modélisation.

En se basant sur une politique d'affectation des ressources partagées bien précise, on peut obtenir une modélisation linéaire du système global, à une certaine approximation près. En effet, cette gestion des ressources est dynamique et ne permet donc pas de prévoir à l'avance le comportement entrée-sortie exact du système global. La politique d'affectation utilisée ici est pseudo-périodique, car elle est un compromis entre une affectation périodique des ressources aux processus concurrents et une satisfaction des premiers produits arrivés sans prendre en compte le processus concurrents dans certains cas. Pour cette politique, nous montrons qu'un problème de ressource partagée entre deux sous-systèmes parallèles peut être transformé en un problème comportant des GET désynchronisés et des délais incertains, qui représentent des incertitudes temporelles quant à l'accès à la ressource et sur sa durée d'indisponibilité.

Le présent chapitre est composé comme suit.

Dans la première section, nous précisons le cadre des systèmes comportant des ressources partagées et définissons le principe de l'exclusion mutuelle, ainsi que la politique d'affectation des ressources que nous utilisons. Cette section inclut aussi un état de l'art, où l'on compare les différentes approches identifiées dans la littérature à la nôtre, afin de justifier l'intérêt de cette dernière.

Dans les deux sections suivantes, nous exposons notre approche sur trois types de SdP, de complexité croissante. Tout d'abord, nous étudions le cas le plus simple du partage d'une ressource unique entre deux postes de travail. Ce cas est ensuite généralisé au partage de plusieurs ressources. Le cas de sous-systèmes

complexes entiers partageant un certain nombre de ressources est étudié dans une section propre, car il nécessite une étape de calcul supplémentaire. Cette dernière a pour but de calculer le temps de séjour maximal pour un jeton dans une sous-partie du réseau de Petri situé entre 2 transitions données.

Enfin, nous abordons dans la section 4.4 deux cas d'application de notre approche. Le premier cas montre comment peut être modélisé le partage d'une ressource simple, en l'occurrence une convergence de convoyeurs où les palettes ne doivent pas se chevaucher. Le deuxième cas d'application met en œuvre l'approche complète concernant le partage de plusieurs ressources entre deux sous-systèmes complexes, ici des ensembles de bassins de traitements chimiques par immersion des produits.

La contribution principale de ce chapitre est de montrer que, pour une politique d'affectation particulière des ressources, il est possible de modéliser linéairement, dans un dioïde d'intervalles, des phénomènes complexes de partages de ressources, par approximation du comportement du système global. Cette modélisation se focalise sur la caractérisation de deux systèmes linéaires dont le comportement est plus lent ou plus rapide que celui du système étudié. Cette approche a fait l'objet de 3 publications [BCL08a, BCL08b, BCL10]

4.1 Ressources partagées et exclusion mutuelle

Nous présentons dans un premier temps les caractéristiques d'un SdP à ressources partagées, c'est-à-dire les conflits sous-jacents et la politique d'affectation dynamique que nous utilisons pour résoudre ces conflits. En fin de section, nous présentons une étude comparative détaillant quelques points ayant motivés nos travaux.

4.1.1 Principe d'une exclusion mutuelle

Une hypothèse généralement admise quand il s'agit d'étudier le comportement de ressources partagées est de considérer une politique d'exclusion mutuelle.

Définition 54 (Exclusion mutuelle). *Lorsque plusieurs processus veulent accéder simultanément à une même ressource¹, utilisable par un seul processus à la fois, il se produit un conflit qui ne peut être résolu sans mécanisme d'affectation approprié. L'exclusion mutuelle possède les deux propriétés suivantes :*

- *À tout instant, au plus un processus peut utiliser la ressource partagée.*
- *Tout processus demandant à utiliser la ressource partagée, en aura la possibilité au bout d'un temps fini.*

Une contrainte d'exclusion mutuelle provient essentiellement de l'indivisibilité d'une ressource. Elle ne peut donc ainsi satisfaire en même temps deux processus la nécessitant pour être menés à bien. La deuxième propriété d'une exclusion mutuelle est nécessaire pour justifier qu'un réseau de Petri modélisant un partage de ressource en exclusion mutuelle est bien vivant.

Des phénomènes d'exclusion mutuelle pour des ressources partagées peuvent être identifiés dans de nombreux contextes, y compris dans la vie de tous les

1. comme ce type de ressources est très contraignant pour le système, on les appelle généralement des « ressources critiques »

jours. On peut citer en exemple une télécommande que des membres d'une famille se disputent, un ballon après lequel courent des joueurs de football ou tout centre de ressources documentaires (bibliothèques, médiathèques, etc.) où certains documents n'existent qu'en un seul exemplaire.

Dans notre contexte des systèmes de production, ces phénomènes sont observables quand un opérateur est affecté à plusieurs postes de travail ou quand un tronçon ne peut être parcouru que par un seul transporteur à la fois (pour des raisons de sécurité, par exemple). Ces systèmes peuvent être illustrés sous la forme du réseau de Petri de la figure 4.1, où P_1 et P_2 sont deux postes de travail partageant le même type de ressource R , dont la quantité n est connue. Chaque poste de travail possède son propre stock amont (notés S_1 et S_2 respectivement), son propre temps de production (notés τ_{P_1} et τ_{P_2} respectivement) et son point d'entrée (notés u_1 et u_2 respectivement). À la fin de leurs opérations, les postes de travail délivrent les produits qu'ils ont réalisés dans leurs stocks aval. Les transitions y_1 et y_2 correspondent aux deux points de sortie du système. Même quand deux postes de travail partagent plus d'une ressource, ils ne peuvent évoluer complètement indépendamment l'un de l'autre. La mise en route d'un des deux postes de travail nécessite une des ressources ; le poste de travail opposé peut éventuellement avoir à attendre que l'une d'entre elles soit libérée pour commencer à fonctionner.

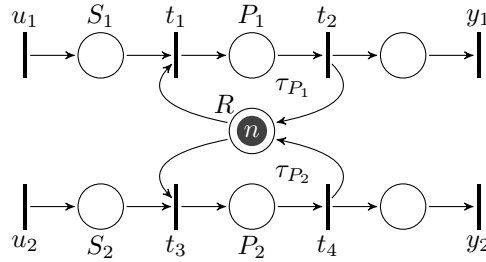


FIG. 4.1 – Tronçon comportant une ressource partagée en quantité finie

Afin de résoudre les conflits survenant quand chacune des places S_1 et S_2 contient au moins un jeton, nous proposons une politique d'affectation permettant à l'un des deux postes de travail de fonctionner à plein régime quand l'autre est à l'arrêt et garantissant une répartition périodique des ressources, afin qu'aucun des deux postes ne soit éternellement lésé par l'autre.

4.1.2 Notre politique d'affectation des ressources

Considérons le système décrit par le RdP de la figure 4.1, où deux lignes de production parallèles nécessitent le même ensemble de ressources. Nous utilisons la politique de gestion suivante pour régler les conflits.

Définition 55 (Politique d'affectation pseudo-périodique). *Une politique d'affectation de type pseudo-périodique concernant une ou de plusieurs ressources partagées s'énonce de la façon suivante :*

Tant qu'il reste suffisamment de ressources disponibles, n'importe quel produit arrivant sur l'une des lignes peut être traité sur le champ par le poste de

travail correspondant. Une des ressources peut ainsi être affectée à un poste plusieurs fois de suite. Si au moins un produit est en attente de traitement dans chacune des lignes, dès qu'une ressource sera libérée par un poste de travail, elle sera affectée au poste de travail concurrent, de manière à assurer une alternance de l'affectation de cette ressource.

Chaque produit devant subir une opération sera donc effectivement traité, en temps voulu. Considérons en premier lieu le comportement du système en cas d'arrivée massive de produits en amont des deux postes de travail. S'il n'y a qu'une seule ressource partagée, cette ressource sera affectée de manière *cyclique* aux différents postes. C'est-à-dire, en fonction du tir des transitions t_2 ou t_4 , la ressource sera par la suite affectée au poste de travail P_2 ou P_1 , respectivement. Par contre, dans le cas d'un nombre n de ressources partagées, s'il y a en permanence des produits en attente de traitement en amont des deux postes de travail, toutes les tâches peuvent être effectuées en parallèle et les n ressources sont utilisées au maximum. Ainsi, un poste pouvant utiliser au plus les n ressources en même temps, on peut garantir que le temps d'attente entre le k^e tir d'une transition d'entrée d'un des deux postes de travail et le $(k-n)^e$ tir de la transition de sortie correspondante est au maximum, selon notre politique d'affectation, du temps de production du poste de travail concurrent (cf. la section 4.2.2 où sera prouvée cette propriété). Considérons maintenant le comportement du système global quand les produits n'arrivent pendant un laps de temps donné qu'en amont de l'un des postes. Ce cas permet à ce dernier de fonctionner à plein régime, tant que le poste concurrent ne nécessite pas de ressource. Il n'existe aucune garantie concernant l'arrivée d'un produit en amont du poste opposé ; il n'est donc pas possible de déterminer de période de comportement. C'est pourquoi nous qualifions cette politique de « pseudo-périodique ».

Les règles d'affectation des ressources peuvent être représentées de manière plus formelle par un réseau de Petri, dont la sémantique est étendue par l'utilisation d'arcs inhibiteurs. Quand une transition est reliée à une place amont par un arc inhibiteur, elle ne peut être tirée tant que cette place contient un jeton [Rei96]. Ainsi, la politique de résolution des conflits utilisée ici est illustrée par la figure 4.2.

Les différents cas possibles d'affectation de la ressource, énumérés dans la définition 55, sont liés aux quatre transitions t_1 , t'_1 , t_3 et t'_3 du RdP de la figure 4.2.

Toute l'importance des places R_1 et R_2 réside dans leur habilité à mémoriser le dernier poste de travail auquel a été affecté une unité de ressource. Ainsi, un jeton se trouvant dans la place R_1 (respectivement R_2) signifie que P_1 (respectivement P_2) a été la dernière place où se situait ce jeton. Ces deux places sont à la base de la gestion de l'alternance de l'affectation des ressources en cas d'une arrivée massive de produits en amont des deux postes. En effet, s'il y a un jeton dans la place R_1 et aucun dans S_2 , alors selon la politique d'affectation pseudo-périodique le poste de travail P_1 peut réserver la ressource, et les arcs inhibiteurs font que t_1 est tirée. P_2 possède le même comportement s'il y a un jeton en R_2 et en S_2 , et aucun en S_1 ². S'il y a au moins un jeton en S_1 et en S_2 en même temps, alors la ressource est réservée alternativement par les deux postes de travail ; t'_1 ou t'_3 est tirée, selon l'arrivée des jetons en R_1 ou R_2 ,

2. t_3 est tirée dans ce cas-là

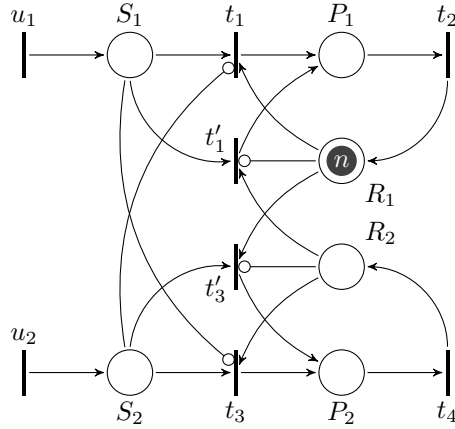


FIG. 4.2 – Diagramme de principe de la règle d'affectation considérée

c'est-à-dire en fonction du dernier poste de travail ayant libéré un élément de ressource partagée.

4.1.3 État de l'art et intérêts de notre approche

Nous abordons dans cette partie un rappel sur les approches identifiées dans la littérature traitant de partages de ressources dans les réseaux de Petri, ainsi que les aspects ayant motivé nos travaux.

État de l'art du partage de ressources dans les RdP

Les systèmes considérés jusqu'à présent sont dits stationnaires, dans le sens où leurs structures n'évoluent pas avec le temps. Sébastien Lahaye a étudié dans sa thèse des systèmes aux nombres de ressources non constant (pour cause de pannes, par exemple) [Lah00]. Il s'agit donc d'ajouter des transitions sources et puits, formant ainsi un réseau de Petri de type GET avec ajout/retrait dynamique de jetons, qui est une sous-classe de RdP à choix libres. À proprement parler, il ne s'agit pas de partage de ressource, cependant cette forme de RdP présente des formes de concurrences à la production et à la consommation de jetons, pouvant représenter le partage d'une ressource entre un processus interne et un processus externe, sur lequel le système n'a pas de contrôle. C'est pourquoi nous avons intégré cette étude dans notre état de l'art. Les calculs se situent dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ et les tirs des transitions sources et puits rajoutés sont exogènes (et leurs mesures sont connues a priori).

D'autres types de systèmes non stationnaires ont été étudiés dans la thèse de Michel Al Saba [AS06]. Il y a proposé deux formes de modélisation des conflits, par des systèmes à commutation d'un côté, et en utilisant la théorie des emplacements de pièces de l'autre [Vie86]. Il est possible dans les systèmes à commutation de changer de mode opératoire, chacun étant représenté par un système $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaire et possédant ses propres matrices caractéristiques [vdBS04]. Les commutations permettent de modifier la structure des systèmes, de casser les synchronisations et de modifier l'ordre des événements. Ces premières peuvent

être effectuées suivant une séquence donnée, aléatoire ou calculée suivant un critère d'optimisation. En utilisant ce paradigme, les systèmes de production peuvent être considérés comme des automates commutant entre plusieurs représentations \mathbb{Z}_{\max} linéaires [ASLB06]. Le problème considéré est la poursuite de trajectoire en juste-à-temps. Cependant l'ordonnancement concernant l'affectation de la ressource partagée doit être connu au préalable (au moins celui qui sera appliqué pendant l'horizon d'étude). Par ailleurs, si le nombre de ressources partagées est considérable, le nombre de modes opératoires est accru de manière exponentielle, ce qui rend cette approche peu utilisable pour une modélisation sur ordinateur de systèmes conséquents. La deuxième forme de modélisation repose sur l'utilisation d'« automates (max,+) » capables de représenter des RdP temporisés saufs [Gau95, GM99]. Ces modèles sont particulièrement intéressants pour évaluer successivement un grand nombre d'ordonnements dans ce type de RdP. Dans le cas d'un job-shop par exemple, pour chaque ordonnancement, il suffit de calculer la hauteur du « tas de pièces », sans avoir à reconsidérer le modèle, alors que l'approche classique consiste à transformer le job-shop en autant de GET qu'il y a d'ordonnements à considérer. Des modèles de type empilement de pièces, utilisés conjointement avec des modèles \mathbb{Z}_{\max} linéaires (des graphes d'événements non nécessairement saufs), permettent la représentation de modèles RdP temporisés correspondant à des systèmes flexibles de production manufacturière [ASBL06]. Ces derniers sont considérés comme résultant d'un assemblage de GET auxquels sont associés des transitions d'entrée de graphes d'état temporisés (saufs).

Les auteurs de l'article [TKG07] proposent de ne pas limiter leur étude à des politiques particulières d'affectation de la ressource, afin de ne négliger aucune séquence possible et de garantir une séquence d'affectation finale optimale. L'idée présentée dans cet article est de passer d'un réseau de Petri quelconque à un graphe d'événements pondéré puis à un graphe d'événements simple. Le problème de l'ordonnancement des ressources est décomposé, d'une part, en une étude du comportement logique, modélisé par des systèmes d'équations et d'inéquations dont les variables sont les marquages initiaux des places, et d'autre part, en une évaluation du temps de cycle des séquences possibles obtenues qui permet l'obtention d'une solution optimale pour un horizon de recherche fixé. De par cette méthode, l'ordonnancement d'affectation de la ressource partagée devient rigide (statique) et déterminé a priori.

La modélisation proposée dans [Lib96, Section II.2.5] permet aussi de considérer des partages de ressources. Le principe est toujours d'étudier d'un côté les relations structurelles entre les applications compteur associées aux transitions d'un réseau de Petri, et d'un autre côté des propriétés quant au nombre de jetons dans les places de ce modèle. Cette approche conduit à un système d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{N}_{+, \times}$ et $\overline{\mathbb{N}}_{\min, +}$.

Une dernière approche identifiée porte sur les systèmes de trafic urbain. Le modèle analytique proposé dans [CATBM09] repose sur la théorie du second ordre pour réaliser des soustractions entre valeurs de compteurs liés à différentes transitions [Plu91b]. Les ressources partagées considérées sont en exclusion mutuelle, dans le sens où chaque ressource ne peut être réservée que par une seule entité. Le nombre de ressources partagées en une zone du système de trafic urbain étudié ne varie pas au cours du temps. Le modèle peut ainsi être découpé en un GET sans ressource partagée et un système de contraintes sous formes d'inéquations, liées à la disponibilité de la ressource. Ces inéquations sont ba-

sées sur les différences entre les valeurs des compteurs des transitions liées par la ressource partagée dans le RdP initial. Cette approche permet de faire de la mesure de performance et de synthétiser une loi de commande pour minimiser les temps d'accès aux ressources.

Récapitulatif

Nous avons résumé dans le tableau 4.1 les données principales liées aux approches présentées dans notre état de l'art.

Publications	Forme des RdP étudiés	Nombre de ressources partagées	Forme de la représentation d'état
[Lah00]	GET avec ajouts et retraits dynamiques de jetons	La variation du nombre de ressources est exogène et connue à priori	Linéaire
[AS06] et [ASLB06]	Quelconque	Quelconque, mais l'ordonnancement doit être connu à l'avance	Linéaires, intégrant les fonctions de commutation
[AS06] et [ASBL06]	RdP quelconque, dont sous-graphes d'états sont saufs	1 seule	Linéaires dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ (dont les variables sont des mots et non des numérotations d'événement)
[TKG07]	Quelconque	Quelconque, associé une politique d'affectation statique (optimale) déterminée à l'avance	Système d'inéquations dont les inconnues sont les marquages initiaux des places, transformé en un système d'équations dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$
[Lib96]	Quelconque	Quelconque	Ensemble d'équations dans $\mathbb{N}_{+, \times}$ et d'inéquations dans $\overline{\mathbb{N}}_{\min, +}$. Pas de garantie de l'unicité des solutions
[CATBM09]	Quelconque	Quelconque	Ensemble d'équations linéaires pour représenter les parties graphes d'événements et d'inéquations linéaires dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ liées à la disponibilité des ressources pour les parties graphes d'états

TAB. 4.1 – Récapitulatif des approches pour l'étude des partages de ressources

Comparaisons avec notre approche

En premier lieu, notre politique d'affectation des ressources est dynamique, ce que ne permettent pas les approches publiées dans [TKG07] et dans [ASLB06], cette dernière approche paraissant peu utilisable pour un grand nombre de ressources partagées. Par ailleurs, l'approche basée sur les « automates $(\max, +)$ » ne permet le partage que d'une seule ressource, ce qui est une contrainte trop forte pour les systèmes que nous étudions [ASBL06]. La forme des réseaux de Petri utilisée dans la thèse de Sébastien Lahaye n'est pas non plus utilisable dans notre cas, à cause du caractère exogène du tir de certaines transitions, pour lesquelles il faut par ailleurs connaître à l'avance les lois de tirs à l'échelle de l'horizon d'étude [Lah00]. L'approche présentée dans [CATBM09], quant à elle, ne permet pas de caractériser le comportement du système, même de manière approchée. Ce n'est qu'après application d'une commande que l'on obtient des données sur le comportement système, qui permettra de satisfaire cette commande. Par opposition, notre approche fournit des informations quantitatives concernant le système, à une approximation près³, indépendamment de toute commande qui pourrait lui être appliquée. L'approche proposée par Laurent Libeaut dans sa thèse ne nous convient pas plus pour modéliser les partages de ressources que pour modéliser les routages, puisqu'elle ne permet pas, dans ce cas non plus, d'obtenir de manière garantie l'unicité des solutions validant le modèle [Lib96].

Nous pouvons aussi citer une approche reposant sur l'utilisation combinée de graphes d'événements, de graphes d'état et de structures algébriques de dioïdes [WD99]. Cependant, la gestion de la concurrence y est trop spécifique. En effet, le système est découpé en un système initial (pour le tout premier tir des différentes transitions) et un système récurrent (pour l'ensemble des tirs suivants). Ce sont les deux seuls cas possibles d'arrivée d'un jeton au niveau d'une place où se situe une concurrence à la production. On en déduit que toutes les transitions ne sont pas vivantes, ce qui est une contrainte trop importante dans notre contexte d'étude.

Nous décrivons maintenant notre approche pour la modélisation de sections ayant une ressource partagée gérée en exclusion mutuelle, selon les différents cas possibles, en transformant ces problèmes en des problèmes d'analyse par intervalles.

4.2 Analyse par intervalles du partage d'une ou de plusieurs ressources

Nous abordons dans cette section le cas de postes de travail élémentaires partageant une ou plusieurs ressources. Par élémentaire, nous entendons que les sections des lignes de production en concurrence ne comportent qu'un processus d'une durée donnée et pouvant traiter un certain nombre de pièces en même temps. Le cas systèmes complexes (composés de plusieurs processus différents) partageant plusieurs ressources sera traité dans la section suivante.

3. on propose ainsi ses cadences de production minimale et maximale garanties

4.2.1 Partage d'une seule ressource entre deux sections simples soumises à temporisation

Prenons tout d'abord le cas le plus simple, illustré par la figure 4.3. Cette figure illustre deux postes de travail en conflit sur l'utilisation d'une seule ressource. Il est possible d'énoncer un certain nombre de propositions concernant les tirs des transitions t_1 , t_2 , t_3 et t_4 , concernées par le partage de ressource. Ces propositions serviront à décrire le comportement des deux postes de travail.

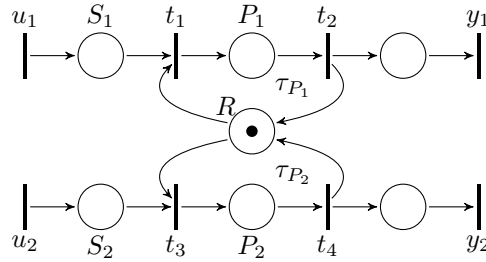


FIG. 4.3 – Une ressource partagée entre deux postes de travail

Comportements possibles et propriétés

On peut identifier deux comportements extrémaux pour chacun des postes de travail :

1. Il n'entre jamais en conflit quant à la réservation de la ressource partagée. Le poste de travail concurrent ne la réserve jamais et le poste considéré peut, en permanence, utiliser la ressource selon ses besoins. Ceci correspond à un comportement linéaire classique où seul un des deux postes de travail est présent, car il n'arrive jamais rien en entrée du poste de travail concurrent. On peut dans ce cas se référer à l'étude qui a été produite pour l'exemple 13 à la page 46.
2. Les conflits sont généralisés : il y a en permanence au moins un produit en attente de traitement en amont de chacun des postes de travail. En considérant notre politique d'affectation de la ressource, le prochain produit à subir un traitement sera donc pris en compte au plus tard après une durée correspondant à la somme des temps de production des deux postes de travail (comme la ressource partagée est affectée alternativement au deux postes).

Ces deux cas de figure décrivent la dynamique du système dans le meilleur cas (pas de conflit) et dans le pire cas (conflits en permanence). La proposition suivante va nous permettre de caractériser, selon un modèle linéaire dans \mathbb{Z}_{\max} , ces deux dynamiques.

Proposition 12. Soient $u_1(k)$, $u_2(k)$, $t_1(k)$, $t_2(k)$, $t_3(k)$ et $t_4(k)$ les applications dateur des transitions respectives u_1 , u_2 , t_1 , t_2 , t_3 et t_4 de la figure 4.3.

$\forall k \in \mathbb{N}$ et pour une politique d'affectation pseudo-périodique, nous avons :

$$\begin{cases} t_1(k) \succcurlyeq \max(u_1(k), t_2(k-1)) \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} t_1(k) \preccurlyeq \max(u_1(k) + \tau_{P_2}, t_2(k-1) + \tau_{P_2}) \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} t_3(k) \succcurlyeq \max(u_2(k), t_4(k-1)) \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} t_3(k) \preccurlyeq \max(u_2(k) + \tau_{P_1}, t_4(k-1) + \tau_{P_1}) \end{cases} \quad (4.4)$$

Démonstration : Cherchons en premier lieu à prouver les inégalités (4.1) et (4.2) concernant les dates des tirs de la transition t_1 , liée au poste de travail P_1 .

La composante conservative du RdP de la figure 4.3 va nous aider à démontrer l'inégalité (4.1). En se limitant au sous-graphe contenant les seules transitions $t_1(k)$, $t_2(k)$, $t_3(k)$ et $t_4(k)$ et places P_1 , P_2 et R , on trouve de manière assez triviale⁴ l'invariant de marquage suivant : $\mathcal{M}(P_1) + \mathcal{M}(P_2) + \mathcal{M}(R) = 1$.

Dès lors t_1 pourra être tirée une fois de plus que t_2 à une date donnée. Donc la date du k^{e} tir de la transition t_1 est nécessairement supérieure ou égale à celle du $(k-1)^{\text{e}}$ tir de la transition t_2 , ce qui nous donne $t_1(k) \succcurlyeq t_2(k-1)$. Or à partir de la dynamique-même du modèle considéré, on a $t_1(k) \succcurlyeq u_1(k)$ car la transition $t_1(k)$ est située en aval de la transition d'entrée u_1 . L'inégalité (4.1) est donc toujours vérifiée.

Pour les besoins de la démonstration de l'inégalité (4.2), nous allons effectuer nos calculs dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$. C'est-à-dire en considérant des applications compteur, obtenus à partir des applications dateur liées aux transition du RdP de la figure 4.3, à l'aide de fonctions de conjugaison. En utilisant la modélisation des réseaux de Petri temporisés présentée dans [Lib96], basée sur les « lois des nœuds » au niveau des places de ces RdP, nous pouvons utiliser comme hypothèses les inégalités suivantes issues du diagramme de la figure 4.3⁵ :

$$\begin{cases} t_1(t) + t_3(t) \leq 1 + t_2(t) + t_4(t) \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} t_2(t) \leq t_1(t - \tau_{P_1}) \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} t_4(t) \leq t_3(t - \tau_{P_2}) \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} t_1(t) \leq u_1(t) \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} t_3(t) \leq u_2(t) \end{cases} \quad (4.9)$$

En outre, l'inégalité (4.2) se réécrit dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ sous la forme suivante :

$$t_1(t) \geq \min(u_1(t - \tau_{P_2}), 1 + t_2(t - \tau_{P_2})) \quad (4.10)$$

Dans le cas $u_1(t - \tau_{P_2}) \leq t_1(t)$, l'inégalité (4.10) est trivialement satisfaite. Vérifions que cette inégalité est satisfaite dans le cas $u_1(t - \tau_{P_2}) > t_1(t)$.

Si $u_1(t - \tau_{P_2}) > t_1(t)$, alors on dispose de suffisamment de matière première à l'instant t pour lancer une production sur le poste de travail P_1 , car moins d'ordres de fabrication ont été lancés à l'instant t qu'il n'y a de produits

4. grâce à l'algorithme de Martínez et Silva [MS82]

5. nous utilisons le symbole d'infériorité \leq du corps conventionnel afin de lever toute ambiguïté entre cette relation d'ordre et celle des dioïdes que nous manipulons, cf. la remarque 6 à la page 23

disponibles pour ces fabrications. Par ailleurs, par monotonie des applications compteur

$$u_1(t - \tau_{P_2}) > t_1(t - \tau_{P_2}).$$

On peut donc aussi affirmer que l'on disposait déjà de suffisamment de produits en amont de P_1 à l'instant $t - \tau_{P_2}$. Supposons $1 + t_2(t - \tau_{P_2}) > t_1(t)$, c'est-à-dire $1 + t_1(t - \tau_{P_2} - \tau_{P_1}) > t_1(t)$ par l'inégalité (4.6). Cela signifie que la transition t_1 n'a pas été tirée pendant un laps de temps égal à la somme des temps de production des deux postes de travail. Or c'est impossible car, selon la règle d'affectation pseudo-périodique de la ressource partagée, cette dernière aurait dû être affectée à P_1 au moins une fois pendant ce laps de temps, ce qui devait nécessairement entraîner le tir de la transition t_1 . En effet, on a supposé disposer de suffisamment de produits pour lancer un ordre de fabrication dès que la ressource partagée est disponible. Ainsi, par l'absurde, si $u_1(t - \tau_{P_2}) > t_1(t)$, alors $1 + t_1(t - \tau_{P_2} - \tau_{P_1}) \leq t_1(t)$. Donc l'inégalité (4.10) est vérifiée. On peut alors affirmer que l'inégalité (4.2) correspondante est aussi toujours vérifiée.

La preuve des inégalités (4.3) et (4.4) se fait de manière analogue, à un changement d'indices près. \square

En conséquence de la proposition 12, il apparaît clairement que les compteurs associés aux transitions t_1 et t_3 appartiennent à des intervalles, dont on vient d'exprimer les bornes. C'est pourquoi nous pouvons utiliser le contexte des dioïdes d'intervalles définis à la section 1.3.2 pour obtenir un modèle linéaire décrivant le comportement du système de production illustré par la figure 4.3. Ainsi en utilisant la politique d'affectation pseudo-périodique que nous avons définie, nous pouvons formuler le système d'équations linéaires suivant, dans le dioïde $I(\mathbb{Z}_{\max})$:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1(k) = \mathbf{u}_1(k) \hat{\otimes} \tau_a \hat{\oplus} \mathbf{t}_2(k-1) \hat{\otimes} \tau_b \\ \mathbf{t}_2(k) = \tau_{P_1} \hat{\otimes} \mathbf{t}_1(k) \\ \mathbf{t}_3(k) = \mathbf{u}_2(k) \hat{\otimes} \tau_c \hat{\oplus} \mathbf{t}_4(k-1) \hat{\otimes} \tau_d \\ \mathbf{t}_4(k) = \tau_{P_2} \hat{\otimes} \mathbf{t}_3(k) \end{cases} \quad (4.11)$$

avec $\tau_a, \tau_b \in [0, \tau_{P_2}]$ et $\tau_c, \tau_d \in [0, \tau_{P_1}]$.

Considérons les lignes de production liées aux postes de travail du système modélisé par la figure 4.3. L'intérêt majeur du système d'équations (4.11) est que le nombre de tirs des transitions d'une des lignes de production est indépendant des transitions de l'autre ligne. Bien que les deux lignes soient liées l'une à l'autre par la même ressource partagée, ceci s'explique par le fait que le modèle proposé est une *approximation* du comportement du système. Il résulte de ce modèle que l'on peut désormais considérer les deux lignes de production indépendamment l'une de l'autre, comme nous allons le voir dans la partie qui suit.

Découplage du système

Il est possible d'illustrer le système d'équations aux compteurs (4.11) par le réseau de Petri de la figure 4.4. En l'occurrence, nous pouvons remarquer que le RdP initial de la figure 4.3 contenant une ressource partagée a été découplé en deux sous-systèmes parallèles indépendants, sous la forme de GET avec incertitudes temporelles.

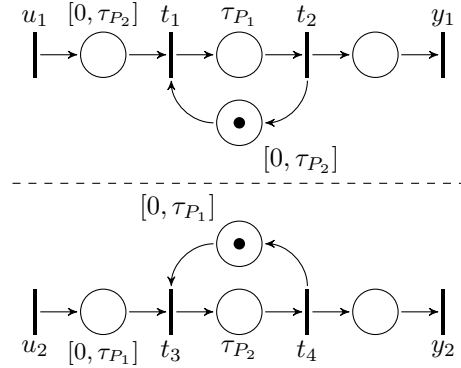


FIG. 4.4 – Découplage du système à ressource partagée initial en GET parallèles

Notre approche de modélisation dédouble les ressources afin d'en attribuer une à chacun des sous-systèmes parallèles, auxquels sont aussi adjoints un certain nombre de contraintes temporelles sous forme d'intervalles. Ces derniers ont pour but de limiter les comportements possibles, afin de garantir pour le système global les mêmes comportements extrémaux que le système original.

La politique d'affectation dynamique de la ressource partagée que nous considérons est dépendante des entrées du système. Il n'est donc pas possible de calculer à l'avance l'ordonnancement d'affectation de cette ressource aux différentes lignes de production parallèles. Par notre approche, cet indéterminisme a été transformé en une approximation dont l'amplitude des possibilités est finie et garantie. En outre, les comportements extrémaux sont de nature linéaire, car modélisables par le biais d'intervalles de temporisations au sein de GET (avec incertitudes temporelles).

Le partage d'une ressource implique une influence mutuelle entre les deux postes de travail. On ajoute, durant la phase de découplage d'un RdP modélisant un système comportant une ressource partagée, des temporisations sous forme d'intervalles selon les deux règles suivantes :

1. Leurs temps de productions respectifs agissent sur leurs comportements en cas de tentative d'utilisation simultanée de la ressource partagée. Ces durées définissent une borne supérieure des intervalles de temps attachés aux places représentant la disponibilité de la ressource. En effet, la politique d'affectation pseudo-périodique de la ressource partagée garantit une alternance d'utilisation de cette ressource. Les deux cas extrémaux sont quand la ressource est immédiatement disponible pour le sous-système considéré (c'est-à-dire quand il n'y a pas de produit en attente de traitement au niveau du sous-système en concurrence) et quand il faut attendre au plus le temps de production du poste de travail de la ligne de production opposée, avant d'avoir à nouveau la possibilité d'utiliser la ressource.
2. Ces mêmes temps de production définissent aussi une borne supérieure des intervalles de temps attachés aux places représentant les stocks amont des différents postes de travail. En effet, considérons le cas suivant. Un poste de travail libère la ressource partagée après avoir fini son traitement. Puis rien ne se passe au niveau du système global (aucun produit n'arrive en

amont des deux sous-systèmes) pendant un temps au moins égal au temps de production du poste de travail concurrent (ce qui a pour effet la satisfaction de la contrainte temporelle du premier poste de travail). Après cela arrivent deux produits, l'un au niveau du deuxième sous-système (il subit donc un traitement sur le champ) et l'autre au niveau du premier sous-système, avant la fin du traitement du premier de ces deux produits. Le premier poste de travail aura donc encore à attendre au moins le temps de production du poste concurrent avant de pouvoir utiliser la ressource partagée et traiter le produit qui lui correspond. Il apparaît ainsi nécessaire de contraindre temporellement le stock amont des différents postes de travail des sous-systèmes devenus indépendants, par un intervalle de temporisations, afin de prendre ce cas en compte.

C'est à partir de ces deux règles que nous avons composé le RdP de la figure 4.4.

Calcul du transfert du système global

On rappelle qu'il est possible, à partir d'un GET avec incertitudes temporelles, de synthétiser le comportement dynamique linéaire du système de production modélisé par ce GET dans un dioïde d'intervalles, comme nous l'avons vu à la section 2.2.3.

Bien entendu, ces intervalles ne permettent pas de fournir la fonction de transfert réelle du système, mais bien de la borner entre celle de deux systèmes linéaires identifiés. L'intérêt est de permettre une approche analytique de ces systèmes, bien qu'il ne sont pas linéaires. On en propose un modèle approché en se focalisant sur les bornes des intervalles identifiés.

Pour chacun des sous-systèmes parallèles générés par notre approche, il s'agit de chercher à obtenir la forme des équations du système (2.19) de la page 67. Nous étudions les dates des tirs des différentes transitions de ce graphe, c'est pourquoi le dioïde d'intervalles de séries formelles utilisé est $I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max} \llbracket \gamma \rrbracket)$. Ainsi, pour le poste de travail P_1 illustré dans la partie haute de la figure 4.4, nous avons $\mathbf{X}_1(\gamma) = (\mathbf{t}_1(\gamma) \quad \mathbf{t}_2(\gamma))^T$. Les matrices d'état \mathbf{A}_1 , de commande \mathbf{B}_1 et de sortie \mathbf{C}_1 , associées au sous-système P_1 possèdent les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} [\varepsilon, \varepsilon] & [\gamma, \tau_{P_2} \gamma] \\ [\tau_{P_1}, \tau_{P_1}] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}_1 &= \begin{pmatrix} [0, \tau_{P_2}] \\ [\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix} \\ \mathbf{C}_1 &= ([\varepsilon, \varepsilon] \quad [e, e])\end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi formuler une approximation $\mathbf{h}_1(\gamma)$ de la fonction de transfert réelle $h_1(\gamma)$ du sous-système représentant le poste de travail P_1 . La fonction de transfert $\mathbf{h}_1(\gamma)$ caractérise tous ses comportements possibles et peut être calculé par l'expression suivante (cf. la relation (2.17) à la page 61).

$$\mathbf{h}_1(\gamma) = \mathbf{C}_1(\gamma \mathbf{A}_1)^* \mathbf{B}_1 = [\tau_{P_1}(\tau_{P_1} \gamma)^*, \tau_{P_1} \tau_{P_2}(\tau_{P_1} \tau_{P_2} \gamma)^*]$$

Par le même raisonnement, nous trouvons l'expression de la fonction de transfert $\mathbf{h}_2(\gamma)$ du sous-système P_2 .

$$\mathbf{h}_2(\gamma) = [\tau_{P_2}(\tau_{P_2} \gamma)^*, \tau_{P_1} \tau_{P_2}(\tau_{P_1} \tau_{P_2} \gamma)^*]$$

Nous pouvons maintenant considérer la relation entrée-sortie du système global, en utilisant les vecteurs d'entrée $\mathbf{U}(\gamma) = (\mathbf{u}_1(\gamma) \quad \mathbf{u}_2(\gamma))^T$ et de sortie $\mathbf{Y}(\gamma) = (\mathbf{y}_1(\gamma) \quad \mathbf{y}_2(\gamma))^T$. On définit donc la matrice de transfert (incertain) $\mathbf{H}(\gamma)$ du système de production global, avec $\mathbf{Y}(\gamma) = \mathbf{H}(\gamma)\mathbf{U}(\gamma)$, de la manière suivante :

$$\mathbf{H}(\gamma) = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1(\gamma) & \varepsilon \\ \varepsilon & \mathbf{h}_2(\gamma) \end{pmatrix}.$$

On constate bien l'indépendance des deux sous-systèmes, obtenue par approximation du comportement des deux postes de travail vis-à-vis de la ressource partagée.

4.2.2 Généralisation au partage de plusieurs ressources

Revenons maintenant au cas plus général du partage de plusieurs ressources entre deux postes de travail, tel que représenté par la figure 4.1. Nous allons voir qu'il est possible d'utiliser une approche similaire à celle présentée ci-dessus.

Comportements possibles et propriétés

Remarque 34. *Contrairement au cas où seulement une ressource est partagée, il n'est plus possible de savoir, par la seule observation des derniers tirs des transitions t_2 et t_4 à quel poste de travail a été affectée en dernier une unité de ressource donnée. Cette observation de la libération de la k^e unité de ressource nous confère uniquement une trace à propos de la $(k - n)^e$ affectation, utilisant cette même unité de ressource. Jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de ressource, toutes les pièces à traiter sont dirigées vers les postes de travail correspondants. Après épuisement des ressources, tout nouvel élément de matière première pourra accéder à la bonne station de travail, en liaison étroite avec la $(k - n)^e$ affectation de la ressource. S'il était réalisé une opération sur le premier poste de travail, alors le k^e produit sera dirigé vers le second poste de travail et vice versa.*

En conséquence, la propriété 12 peut être généralisée pour un nombre n de ressources partagées. Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante.

Proposition 13. *Soient $u_1(k)$, $u_2(k)$, $t_1(k)$, $t_2(k)$, $t_3(k)$ et $t_4(k)$ les applications dateur respectivement des transitions u_1 , u_2 , t_1 , t_2 , t_3 et t_4 de la figure 4.1.*

$\forall k \in \mathbb{N}$ et pour une politique d'affectation pseudo-périodique, nous avons :

$$\begin{cases} t_1(k) \succcurlyeq \max(u_1(k), t_2(k - n)) \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} t_1(k) \preccurlyeq \max(u_1(k) + \tau_{P_2}, t_2(k - n) + \tau_{P_2}) \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\begin{cases} t_3(k) \succcurlyeq \max(u_2(k), t_4(k - n)) \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} t_3(k) \preccurlyeq \max(u_2(k) + \tau_{P_1}, t_4(k - n) + \tau_{P_1}) \end{cases} \quad (4.15)$$

Démonstration : Étudions tout d'abord la véracité des inégalités (4.12) et (4.13).

Nous allons de nouveau transposer les calculs dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$. À partir

du RdP de la figure 4.1, nous pouvons formuler les inégalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1(t) + t_3(t) \leq n + t_2(t) + t_4(t) \\ t_2(t) \leq t_1(t - \tau_{P_1}) \\ t_4(t) \leq t_3(t - \tau_{P_2}) \\ t_1(t) \leq u_1(t) \\ t_3(t) \leq u_2(t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.16) \\ (4.17) \\ (4.18) \\ (4.19) \\ (4.20) \end{array}$$

Une application compteur est croissante dans le corps conventionnel, nous avons donc

$$t_3(t - \tau_{P_2}) \leq t_3(t).$$

Ainsi, d'après (4.18), nous obtenons

$$t_4(t) \leq t_3(t). \quad (4.21)$$

En retirant la valeur de $t_3(t)$ de chaque côté de l'inégalité (4.16), on trouve

$$t_1(t) \leq n + t_2(t) + t_4(t) - t_3(t).$$

En réutilisant l'inégalité (4.21), nous pouvons affirmer

$$t_1(t) \leq n + t_2(t). \quad (4.22)$$

En combinant cette dernière inégalité et l'inégalité (4.19), nous vérifions que (4.12) est vraie.

L'inégalité (4.13) se réécrit dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ sous la forme suivante :

$$t_1(t) \geq \min(u_1(t - \tau_{P_2}), 1 + t_2(t - \tau_{P_2})) \quad (4.23)$$

D'un point de vue arithmétique⁶, si $u_1(t - \tau_{P_2}) \leq t_1(t)$, l'inégalité (4.13) est forcément vérifiée, pour toutes les valeurs de $t_2(k - n) + \tau_{P_2}$.

Étudions donc le cas où $u_1(t - \tau_{P_2}) > t_1(t)$. Il est clair que l'on dispose dans ce cas de suffisamment de matière première à l'instant t pour lancer une production sur le poste de travail P_1 . Supposons $n + t_2(t - \tau_{P_2}) > t_1(t)$, c'est-à-dire $n + t_1(t - \tau_{P_2} - \tau_{P_1}) > t_1(t)$ par l'inégalité (4.17). Dans cette éventualité, la transition t_1 a été tirée moins de n fois pendant un laps de temps égal à la somme des temps de production des deux postes de travail. Ceci ne peut pas être vrai, car en présence de suffisamment de matière en amont du poste de travail P_1 , t_1 aurait dû être tirée au moins n fois pendant ce laps de temps. Ainsi, par l'absurde, si $u_1(t - \tau_{P_2}) > t_1(t)$, alors $n + t_1(t - \tau_{P_2} - \tau_{P_1}) \leq t_1(t)$ et donc l'inégalité (4.23) est vérifiée. En conséquence, nous avons par la même occasion prouvé l'inégalité (4.13).

La preuve des inégalités (4.3) et (4.4) se fait de manière analogue, aux noms des transitions près. \square

6. nous utilisons à nouveau les relations d'ordre du corps conventionnel pour lever toute ambiguïté

En considérant les différents compteurs associés aux transitions via leurs intervalles de possibilités, nous pouvons formuler dans le dioïde $I(\mathbb{Z}_{\max})$ le système d'équations linéaires régissant le comportement du réseau de Petri de la figure 4.1 :

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1(k) = \mathbf{u}_1(k) \hat{\otimes} \tau_a \hat{\oplus} \mathbf{t}_2(k-n) \hat{\otimes} \tau_b \\ \mathbf{t}_2(k) = \tau_{P_1} \hat{\otimes} \mathbf{t}_1(k) \\ \mathbf{t}_3(k) = \mathbf{u}_2(k) \hat{\otimes} \tau_c \hat{\oplus} \mathbf{t}_4(k-n) \hat{\otimes} \tau_d \\ \mathbf{t}_4(k) = \tau_{P_2} \hat{\otimes} \mathbf{t}_3(k) \end{cases} \quad (4.24)$$

avec $\tau_a, \tau_b \in [0, \tau_{P_2}]$ et $\tau_c, \tau_d \in [0, \tau_{P_1}]$.

Calcul du transfert du système global

Comme pour le cas précédent, les applications compteur associées aux transitions d'une des lignes de production peuvent être vues comme indépendantes des applications compteur des autres transitions, par approximation. On va donc pouvoir découpler le système global en deux lignes de production indépendantes, de la même manière que lorsqu'une seule ressource est partagée, à la différence près que chaque sous-système découplé se voit attribué n éléments de ressource, dans le cas où n ressources sont partagées.⁷

En utilisant la même approche que dans la section précédente, le système modélisé peut être mis sous la forme des équations du système (2.19) de la page 67. Seul un des coefficients de la matrice \mathbf{A}_1 est différent du modèle précédent, c'est pourquoi nous ne présentons ici que cette matrice. Ce coefficient est lié à la place contenant le nombre de ressources partagées, supposé égal à n .

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} [\varepsilon, \varepsilon] & [\gamma^n, \tau_{P_2} \gamma^n] \\ [\tau_{P_1}, \tau_{P_1}] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix}$$

Il est donc possible de proposer un modèle linéaire pour le système global, tenant compte des incertitudes liées à la politique d'affectation des ressources. La matrice de transfert $\mathbf{H}(\gamma)$ permet d'intégrer tous les comportements possibles du système, quelle que soit l'arrivée des différents produits au niveau de ses entrées.

En se basant sur les fonctions de transfert $\mathbf{h}_1(\gamma)$ et $\mathbf{h}_2(\gamma)$ des deux sous-systèmes dont est composé le système de production global, on définit la matrice de transfert (incertain) $\mathbf{H}(\gamma)$ de ce dernier, par la relation suivante :

$$\mathbf{H}(\gamma) = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1(\gamma) & \varepsilon \\ \varepsilon & \mathbf{h}_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1(\gamma) &= \mathbf{C}_1(\gamma \mathbf{A}_1)^* \mathbf{B}_1 = [\tau_{P_1}(\tau_{P_1} \gamma)^*, \tau_{P_1} \tau_{P_2}(\tau_{P_1} \tau_{P_2} \gamma)^*] \\ \mathbf{h}_2(\gamma) &= [\tau_{P_2}(\tau_{P_2} \gamma)^*, \tau_{P_1} \tau_{P_2}(\tau_{P_1} \tau_{P_2} \gamma)^*]. \end{aligned}$$

⁷. devant le peu de différence entre les réseaux de Petri dont il est question, il n'apparaît pas utile de présenter ce découplage

4.3 Partage de ressources entre des systèmes complexes linéaires

Nous traitons dans cette section le cas de systèmes complexes (composés de plusieurs processus différents) partageant des ressources. La théorie de la résiduation prouve encore ici son importance, car elle permet de mettre en œuvre des calculs de « second ordre » entre des trajectoires complètes de signaux et non juste entre des valeurs de ces signaux en des points donnés.

4.3.1 Calcul de la borne inférieure de l'intervalle

Les systèmes en conflits pour l'utilisation d'une ressource sont considérés linéaires dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$. Chacun de ces systèmes possède une réponse impulsionnelle h_i qui le caractérise complètement, ainsi qu'une entrée v_i et une sortie w_i correspondantes. Ce type de système peut être représenté par le réseau de la figure 4.5⁸.

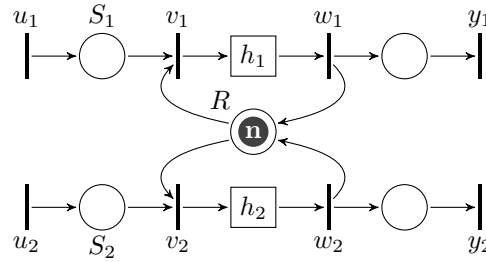


FIG. 4.5 – Systèmes linéaires parallèles partageant des ressources

Comme pour les cas précédents, la technique développée ici repose sur la caractérisation des comportements extrémaux du système global illustré par la figure 4.5, l'un plus rapide et l'autre plus lent que le fonctionnement réel du système, au sens du dioïde considéré ($\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ en l'occurrence). Le fonctionnement le plus « rapide » (le plus productif) de l'un des sous-systèmes est quand ce dernier peut pleinement profiter de l'ensemble des ressources (c'est-à-dire quand il n'y a pas de conflit). Soit n à nouveau le nombre de ces ressources partagées. Dans ce cas le plus rapide, il est possible de ne pas considérer l'influence de l'un des sous-système, puisqu'il ne rentre jamais en fonctionnement. Nous pouvons alors caractériser de manière précise les applications dateur v_i et w_i , en utilisant seulement les caractéristiques structurelles du sous-système correspondant. Prenons comme hypothèse le fait que le deuxième sous-système est inactif.

D'après la structure du réseau de Petri de la figure 4.5, on trouve

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \oplus \gamma^n w_1 \\ w_1 = h_1 v_1 \end{cases} \quad (4.25)$$

$$(4.26)$$

Il est possible d'injecter le membre de droite de l'équation (4.26) dans l'équation (4.25), ce qui nous donne $v_1 = u_1 \oplus \gamma^n h_1 v_1$. Mais cette dernière équation

8. dans lequel les blocs H_i sont des macro-places

est implicite, et il est préférable de manipuler des formes explicites des deux applications dateur v_i et w_i . Ce dernier type de forme peut être obtenu grâce au corollaire 1 de la page 27, et l'on trouve les expressions suivantes.

$$\begin{cases} v_1 = (\gamma^n h_1)^* u_1 \\ w_1 = h_1 (\gamma^n h_1)^* u_1 \end{cases} \quad (4.27)$$

De même, le comportement le plus rapide du deuxième sous-système nous donne

$$\begin{cases} v_2 = (\gamma^n h_2)^* u_2 \\ w_2 = h_2 (\gamma^n h_2)^* u_2 \end{cases} \quad (4.28)$$

Ainsi, le transfert qui existe entre les transitions v_i et w_i est égal à $h_i(\gamma^n h_i)^*$ dans le meilleur des cas.

4.3.2 Théorie du second ordre et caractérisation du temps de séjour maximal dans un sous-système

Le comportement le plus lent des sous-systèmes en concurrence est atteint quand chacun d'entre eux doit attendre la durée la plus longue possible pour se voir affecter à nouveau la ressource. Cette durée la plus longue est le temps de séjour maximal Δ_i qu'un produit peut effectuer entre les deux bornes v_i et w_i d'un des sous-systèmes. Il s'agit donc de calculer une différence (au sens du corps conventionnel) entre deux applications. Afin de rendre ces temporisations explicites dans le réseau de Petri, il est possible de les adjoindre aux macro-places h_i , comme proposé sur la figure 4.6.

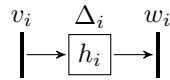


FIG. 4.6 – Prise en compte explicite du temps de séjour maximal dans un système

Entre deux éléments d'un dioïde de scalaire (tel que $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$), la loi \otimes permet de réaliser une addition. Nous pourrions être tentés d'étudier l'inverse d'une telle loi, mais il n'existe pas à proprement parler d'inverse dans un dioïde ; c'est pourquoi il n'est pas possible de manipuler de cette manière l'opération de soustraction recherchée. Dans cette partie, nous étudions des signaux, donc la loi correspondante au produit \otimes de deux scalaires est le produit de (sup-) convolution $*$ du dioïde des signaux (à support dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$), mais il n'est toujours pas possible de considérer d'inverse. Cependant, la théorie de la résiduation, dont il a été fait un rappel à la section 1.2.3, aboutit entre autres à la définition du pseudo-inverse $\not\prec$ du produit de convolution (à droite), noté $*$.

Soient les deux applications dateur attachées aux transitions v_i et w_i . La résiduée $v_i \not\prec w_i$ (aussi notée $\frac{v_i}{w_i}$) renvoie la distance maximale (négative) entre les trajectoires de ces deux applications. Il s'agit donc de réaliser des calculs sur des applications, et non sur des valeurs de ces applications. On peut à ce propos parler de « théorie du second ordre » [Plu91b]. Si les applications dateur renvoient des valeurs faisant partie d'un ensemble fini (c'est l'hypothèse que nous allons considérer), la résiduée correspond exactement à la différence

conventionnelle. On calcule donc, grâce à cette résiduée, le temps de séjour passé entre deux transitions données.

Revenons à l'étude du système décrit par la figure 4.5. Pour tout produit numéroté k , on note $T_{v_i w_i}(k)$ son temps de séjour entre les transitions v_i et w_i . La théorie de la résiduation nous indique que

$$\forall k \in \mathbb{N}, T_{v_i w_i}(k) = |v_i(k) \not\prec w_i(k)|.$$

Quand les valeurs $v_i(k)$ et $w_i(k)$ sont finies, $T_{v_i w_i}(k)$ peut être réécrit comme une différence. D'où $T_{v_i w_i}(k) = w_i(k) - v_i(k)$. Cette quantité est toujours positive, car à partir de l'équation (4.25) et de la relation d'ordre définie au théorème 2 de la page 22, on sait que $w_1(k) \succcurlyeq v_1(k), \forall k$.

Théorème 22 (Caractérisation du temps de séjour). *Soient v_i et w_i deux applications dateur. $\forall k \in \mathbb{N}$, on a*

$$T_{v_i w_i}(k) \preccurlyeq \left| \left(\frac{v_i}{w_i} \right) (0) \right|.$$

Démonstration : En s'inspirant de la preuve du lemme 4.95 de [BCOQ92, page 201], posons $x_i = v_i \not\prec w_i$, soit $v_i = x_i \otimes w_i$ en inversant la relation à l'aide de la théorie de la résiduation. D'où

$$v_i(\kappa) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bigsqcup_{\kappa k} (x_i(k)),$$

où $\bigsqcup_{\kappa k} (y) = y w_i(\kappa - k)$.

Par conséquent, en inversant à nouveau cette relation, on trouve

$$x_i(k) = \bigwedge_{\kappa \in \mathbb{Z}} \bigsqcup_{\kappa k}^{\sharp} (v_i(\kappa)).$$

Et pour finir, on obtient

$$\left(\frac{v_i}{w_i} \right) (k) = \bigwedge_{\kappa \in \mathbb{Z}} \{v_i(\kappa) \not\prec w_i(\kappa - k)\}.$$

En particulier, pour $k = 0$,

$$\left(\frac{v_i}{w_i} \right) (0) = \inf_{\kappa \in \mathbb{Z}} \{v_i(\kappa) - w_i(\kappa)\}.$$

Or $w_1(\kappa) \succcurlyeq v_1(\kappa), \forall \kappa$, donc cette différence ne renvoie que des valeurs négatives, dont l'une est éventuellement la plus petite. La valeur absolue de cette dernière valeur correspond au plus grand temps de séjour possible. Ainsi

$$\left(\frac{v_i}{w_i} \right) (0) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{T_{v_i w_i}(k)\}.$$

Ce dernier résultat nous permet de conclure la preuve. □

Cependant, il ne nous est pas possible de calculer par avance les dates des tirs des transitions v_i et w_i , en effet, elles dépendent dynamiquement de l'arrivée des produits en amont de l'un ou l'autre des sous-systèmes, comme exprimé dans les systèmes (4.27) et (4.28). Il s'agit donc de trouver un moyen de caractériser le rapport $\left(\frac{v_i}{w_i}\right)(0)$ sans faire intervenir les applications dateur attachées aux entrées du système. C'est le but de la propriété suivante.

Propriété 6. *Pour toutes les applications dateur u_i , on a*

$$0 \succcurlyeq \frac{(\gamma^n h_i)^* u_i}{h_i(\gamma^n h_i)^* u_i}(0) \succcurlyeq \frac{(\gamma^n h_i)^*}{h_i(\gamma^n h_i)^*}(0).$$

Démonstration : Notons a_i et b_i les fonctions de transfert $(\gamma^n h_i)^*$ et $h_i(\gamma^n h_i)^*$ respectivement. Grâce à la propriété (p.6) concernant les résiduées, on sait que pour toute application dateur u_i ,

$$(a_i u_i) \phi u_i \succcurlyeq a_i.$$

Par ailleurs, l'opération $R_a^\#$ étant isotone, on obtient

$$((a_i u_i) \phi u_i) \phi b_i \succcurlyeq a_i \phi b_i.$$

Pour finir, en utilisant la propriété (p.9) des résiduées, présentée dans le tableau 1.1 de la page 26, on sait aussi que $((a_i u_i) \phi u_i) \phi b_i = (a_i u_i) \phi (b_i u_i)$, en général, et pour la valeur 0 en particulier. Nous pouvons donc conclure⁹. \square

On a donc

$$0 \succcurlyeq \frac{v_i}{w_i}(0) = \frac{(\gamma^n h_i)^* u_i}{h_i(\gamma^n h_i)^* u_i}(0) \succcurlyeq \frac{(\gamma^n h_i)^*}{h_i(\gamma^n h_i)^*}(0).$$

Notation 7 (Borne supérieure du temps de séjour). *Suite au raisonnement précédent, on peut affirmer que $\left| \frac{(\gamma^n h_i)^*}{h_i(\gamma^n h_i)^*}(0) \right|$ est une borne supérieure du temps de séjour des produits dans le sous-système numéroté i , valable pour toutes les commandes possibles en entrée du système global.*

Cette valeur sera désormais notée Δ_i .

On remarque que, même si cela peut ne jamais arriver, la valeur Δ_i est atteinte quand toutes les ressources sont affectées au sous-système h_i , en supposant une arrivée consécutive de produits à traiter en amont de ce système. En particulier, si le nombre de ressources partagées affectées à un système dépasse la capacité de ce dernier, certaines d'entre elles auront à attendre que le système ait fini suffisamment de réalisations avant d'être utilisées. Comme la transition v_i est une transition de synchronisation, chacun de ses tirs fait rentrer dans le sous-système correspondant un couple (élément de ressource, produit). Les produits correspondant auront donc éventuellement à subir l'attente dont nous venons de parler pour les éléments de ressource. C'est pourquoi le temps de séjour maximum est directement dépendant du nombre de ressources partagées présentes dans le système global. L'exemple suivant va nous permettre de constater ce fait.

9. il est à noter que la preuve d'une propriété similaire peut être trouvée dans [Cot99, Lemme 4.18, page 138]

Exemple 26. (Calcul de Δ) Considérons un système linéaire dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$ dont la fonction de transfert est $h = 10\gamma^0(10\gamma^3)^*$ et qui partage n ressources avec un autre système linéaire. Notons Δ la borne supérieure du temps de séjour des produits dans le système h .

Pour $n \in [1..3]$, $\Delta = |\frac{(\gamma^n h)^*}{h(\gamma^n h)^*}(0)| = 10$. Ceci était prévisible à partir de la périodicité exprimée dans la fonction de transfert h (cf. la section 2.2.3). En effet, le système est conçu pour pouvoir traiter 3 pièces toutes les 10 unités de temps. Donc dans le cas où $n \in [1..3]$, le temps de séjour maximal est de 10 unités de temps.

Plus généralement, pour toutes les valeurs de k , on trouve le temps de séjour maximal en fonction du nombre de ressources que l'on situe au niveau du partage : $\Delta = 10 \times (n \operatorname{div} 3)^{10}$.

4.3.3 Calcul du transfert du système global

Grâce à la caractérisation de Δ_i , nous pouvons considérer le système H_i comme une boîte noire donc le décalage temporel maximal est connu. Ainsi

$$H_i(\gamma^n H_i)^* \preceq \Delta_i(\Delta_i \gamma^n)^*.$$

Cette expression définit un majorant pour le comportement du système H_i , qui va être utilisé comme borne supérieure de l'intervalle de ses comportements possibles. Par ailleurs, tout comme dans le cas précédent, le comportement le plus petit (le plus rapide) est obtenu en affectant toutes les ressources à ce système.

Le comportement entrée-sortie du système de production global est quant à lui décrit par la relation $\mathbf{Y}(\gamma) = \mathbf{H}\mathbf{U}(\gamma)$, avec $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \mathbf{h}_2 \end{pmatrix}$.

En utilisant les temps de séjours maximum Δ_i de chaque sous-système, il est possible de décrire analytiquement sous forme d'intervalles les fonctions de transfert des deux lignes de production de la figure 4.5. Ces deux fonctions de transfert s'énoncent comme suit

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1 = ([H_1(\gamma^n H_1)^*, \Delta_1 \Delta_2(\Delta_1 \Delta_2 \gamma^n)^*]) \\ \mathbf{H}_2 = ([H_2(\gamma^n H_2)^*, \Delta_1 \Delta_2(\Delta_1 \Delta_2 \gamma^n)^*]) \end{cases}.$$

La borne supérieure inclut donc une temporisation qui est elle-même une borne supérieure.

4.4 Cas d'application

4.4.1 Convergence de convoyeurs gérée en exclusion mutuelle

Le premier cas d'application concerne une ligne complexe de transfert automatisée, située au laboratoire LISA, à Angers. Cette ligne de transfert est en forme de huit (voir la figure 4.7), ce qui implique l'utilisation d'une règle de gestion de la section commune des convoyeurs. Le premier embranchement

10. où div est l'opération de division entière

(partie hachurée dans la figure) peut être considéré comme une ressource partagée. En effet, une seule palette peut se trouver dans cette section à un moment donné, car elles ne peuvent physiquement pas se chevaucher. Si cette partie du système n'était pas gérée en exclusion mutuelle, il y aurait un risque de chute des palettes par chevauchement, par exemple. Le second embranchement (divergence de convoyeurs) ne requiert pas de politique de gestion particulière dans notre cas, car toutes les palettes ont justement été suffisamment distancées sur le tronçon commun (en gris sur la figure), du fait de la gestion de la zone de convergence.

Toutes les palettes sont chargées au niveau d'un point de chargement et sont déplacées le long du système jusqu'à un point de déchargement, où les produits réalisés qu'elles transportaient sont récupérés. Leurs parcours suivent la direction des flèches numérotées de la figure 4.7 dans l'ordre croissant. Le problème principal est de pouvoir anticiper le flot des palettes dans le premier embranchement, en utilisant la politique d'affectation pseudo-périodique définie dans la section 4.1.2.

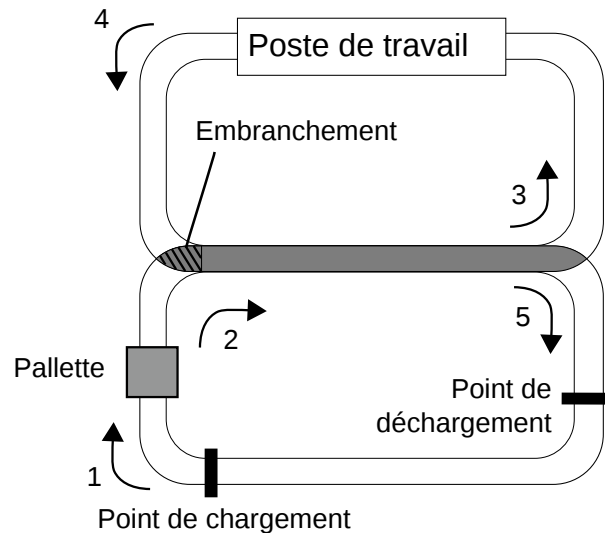


FIG. 4.7 – Ligne de transfert automatisée

Nous pouvons considérer l'embranchement entre les trois capteurs présentés sur la figure comme étant une ressource partagée. Ainsi, les portions de convoyeurs entre les capteurs $C1$ et $C3$ et les capteurs $C2$ et $C3$ sont vues comme des postes de travail dont la durée opératoire est le temps de transfert sur chacune de ces portions. Ainsi, nous pouvons représenter le système global par le réseau de Petri de la figure 4.8.

La décision d'aller soit sur l'hippodrome, soit sur la boucle de chargement et de déchargement en sortie du tronçon commun est prise dès l'arrivée au niveau de la convergence des convoyeurs. C'est pourquoi il apparaît dans la figure 4.8 deux chemins théoriques sortants de cet embranchement (représenté par les transitions t_2 et t_4), ayant tous les deux la même temporisation, τ_{Commun} , égale à 10 unités de temps dans notre cas.

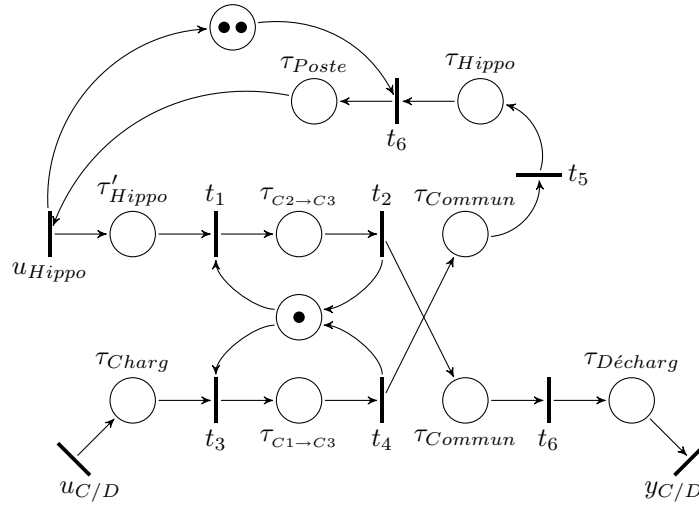


FIG. 4.8 – Modèle RdP de la ligne de transfert

Les durées de convoyage entre $C1$ et $C3$ et entre $C2$ et $C3$ (notées respectivement $\tau_{C1 \rightarrow C3}$ et $\tau_{C2 \rightarrow C3}$ dans la figure 4.8) sont égales à 6 et 7 unités de temps respectivement¹¹. Les durées de convoyage à partir du point de chargement vers le premier embranchement et du deuxième embranchement vers le point de déchargement, appelées τ_{Charg} et $\tau_{Décharg}$, sont toutes les deux de 20 unités de temps. Les durées de convoyage sur l'hippodrome entre la section commune et le poste de travail ainsi qu'entre le poste de travail et la section commune (notées τ_{Hippo} et τ'_{Hippo} respectivement) sont de 20 et 25 unités de temps. Le poste de travail peut usiner deux pièces d'en-cours à la fois et ceci prend 30 unités de temps (τ_{Poste}) pour chaque pièce.

En notant τ_x l'intervalle dont les deux bornes sont égales à τ_x , et $\mathbf{h}_{C/D}$ et \mathbf{h}_{Hippo} les fonctions de transfert du premier embranchement, appartenant respectivement à la boucle de chargement/déchargement et à la boucle de l'hippodrome, nous pouvons caractériser la fonction de transfert \mathbf{h} du système global dans le dioïde $I(\mathbb{Z}_{\max}[\gamma])$. Le système global étant bouclé et ne possédant qu'une seule entrée et une seule sortie, son transfert est bien une fonction et non une matrice.

$$\mathbf{h} = \tau_{Charg} \hat{\otimes} \mathbf{h}_{C/D} \hat{\otimes} \tau_{Commun} \hat{\otimes} \tau_{Hippo} \hat{\otimes} \tau_{Poste} \hat{\otimes} \tau'_{Hippo} \hat{\otimes} \mathbf{h}_{Hippo} \hat{\otimes} \tau_{Commun} \hat{\otimes} \tau_{Décharg}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{C/D} &= [\tau_{C1 \rightarrow C3}(\tau_{C1 \rightarrow C3} \gamma)^*, \tau_{C1 \rightarrow C3} \tau_{C2 \rightarrow C3}(\tau_{C1 \rightarrow C3} \tau_{C2 \rightarrow C3} \gamma)^*] \\ &= [6(6\gamma)^*, 13(13\gamma)^*] \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{h}_{Hippo} = [7(7\gamma)^*, 13(13\gamma)^*].$$

11. elles se trouvent être différentes car les capteurs $C1$ et $C2$ ne sont pas exactement situés à la même distance du capteur $C3$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{h} = & [20, 20] \hat{\otimes} [6(6\gamma)^*, 13(13\gamma)^*] \hat{\otimes} [10, 10] \hat{\otimes} [20, 20] \hat{\otimes} [30(30\gamma^2)^*, 30(30\gamma^2)^*] \hat{\otimes} \\ & [25, 25] \hat{\otimes} [7(7\gamma)^*, 13(13\gamma)^*] \hat{\otimes} [10, 10] \hat{\otimes} [20, 20] [115, 115] \hat{\otimes} \\ & [13(7\gamma)^*, 26(13\gamma)^*] \hat{\otimes} [30(30\gamma^2)^*, 30(30\gamma^2)^*] \\ \text{d'où } \mathbf{h} = & [(158 \oplus 165\gamma)(30\gamma^2)^*, (171 \oplus 184\gamma)(30\gamma^2)^*] \end{aligned}$$

Il ressort de cette fonction de transfert que le premier produit va passer 158 unités de temps au plus tôt et 171 unités de temps au plus tard dans le système avant de sortir, à partir du chargement de ce dernier. Par ailleurs, la cadence de production des deux bornes est la même. On peut donc en déduire celle de l'unité de production globale, à savoir 2 produits toutes les 30 unités de temps. Cette cadence est celle du poste de travail en son sein. Dès lors, on constate dans cet exemple que l'incertitude du comportement de la section partagée est en partie masquée par la dynamique du poste de travail (à savoir $30(30\gamma^2)^*$).

4.4.2 Bassins de traitements partageant des conteneurs

Ce cas d'application-ci a pour but de mettre en œuvre l'approche généralisée de la section 4.3. Il s'agit de modéliser dans une structure algébrique de dioïde le comportement d'un atelier de production constitué de trois bassins contenant des liquides de différentes compositions, servant à faire subir des traitements chimiques spécifiques par immersion à des produits. Les bassins partagent le même ensemble de conteneurs, permettant de déposer les produits à traiter. Dans les deux premiers bassins, les immersions servent à déposer des colorants et le troisième bassin contient de quoi déposer une couche de vernis.

L'ensemble de ces bassins peut être considéré comme deux lignes de production parallèles. Le premier bassin permet l'immersion de 2 conteneurs à la fois, et le second de 4 à la fois (car ce dernier est utilisé aussi dans d'autres gammes, mais nous ne les considérons pas dans le cadre de cette étude). Les conteneurs sont immergés respectivement 1 et 4 unités de temps dans ces bassins. Le troisième bassin permet l'immersion de 5 conteneurs à la fois et cette immersion dure 3 unités de temps. Après l'immersion dans le bain de vernis, les produits réalisés ont besoin de sécher, ce qui nécessite 2 unités de temps. Pour finir, 10 conteneurs sont partagés entre les deux lignes de production.

Ce système de production peut être modélisé par le réseau de Petri de la figure 4.9.

En ne prenant pas en compte le fait que les conteneurs sont partagés, c'est-à-dire dans le cas où chacun des deux sous-systèmes peut en disposer à sa guise, on définit le comportement le plus rapide des sous-systèmes situés entre les transitions v_i et w_i , qui correspond aux fonctions de transfert suivantes dans $\mathbb{Z}_{\max}[[\gamma]]$:

$$\begin{cases} H_{v_1 w_1} = (5 \oplus 6\gamma^2)(4\gamma^4)^* \\ H_{v_2 w_2} = 3(3\gamma^5)^* \end{cases} .$$

Le modèle global entrée-sortie de cet atelier nécessite la caractérisation des temps de séjour maximaux Δ_1 et Δ_2 liés aux systèmes $H_{v_1 w_1}$ et $H_{v_2 w_2}$ respectivement. En se basant sur la propriété 6, on trouve pour Δ_1 et Δ_2 les valeurs 13 et 6 unités de temps respectivement.

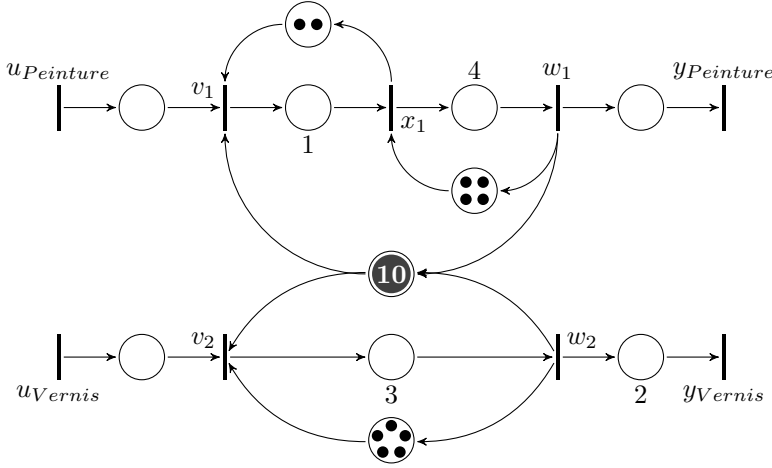


FIG. 4.9 – Bassins de traitements sous forme de réseau de Petri

Ainsi, le comportement entrée-sortie $\mathbf{Y}(\gamma) = \mathbf{H}\mathbf{U}(\gamma)$ de ce système est défini par les données suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1 = ([H_1(\gamma^n H_1)^*, \Delta_1 \Delta_2 (\Delta_1 \Delta_2 \gamma^n)^*]) = [(5 \oplus 6\gamma^2)(4\gamma^4)^*, 19(19\gamma^{10})^*] \\ \mathbf{H}_2 = ([2H_2(\gamma^n H_2)^*, 2\Delta_1 \Delta_2 (\Delta_1 \Delta_2 \gamma^n)^*]) = [3(3\gamma^5)^*, 21(19\gamma^{10})^*] \end{cases},$$

pour $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \mathbf{h}_2 \end{pmatrix}$.

4.5 Bilan

Quand un système présente un phénomène de partage de ressources, il n'est pas possible de déterminer de manière précise son comportement global, à cause du jeu de balancier qui s'exerce entre les deux sous-systèmes en concurrence pour l'accès aux différentes ressources. Aucun des deux sous-systèmes ne peut fonctionner à plein régime car les ressources sont en quantités limitées et ce type de SdP ne présente pas d'intérêt si l'un des sous-système est inactif pendant un certain laps de temps. Par ailleurs, en fonction des arrivées des produits en amont des sous-systèmes, il ne se présente pas en permanence de situation de conflit. En conséquence, aucun des deux comportements extrémaux des sous-systèmes n'est valable en permanence. Il est donc nécessaire de les considérer tous les deux (ainsi que tous les comportements intermédiaires possibles), à l'aide d'intervalles de comportements, modélisables dans un dioïde d'intervalles. Le comportement entrée-sortie du système global se situe donc « entre les deux bornes » de ce type d'intervalles, ces dernières étant caractérisables à l'aide des approches présentées dans ce chapitre. En considérant ces intervalles dans leur ensemble, on obtient donc une modélisation formelle linéaire de systèmes complexes présentant des partages de ressources.

Conclusion et perspectives

Le travail présenté dans cette thèse porte sur les systèmes linéarisables dans des dioïdes d'intervalles. La motivation de ce travail est issue du manque de méthode pour l'analyse de systèmes dynamiques à événements discrets présentant des conflits. Il s'agit donc d'étendre la classe de systèmes à événements discrets analysables via la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes, en proposant un formalisme de modélisation approchée de tels systèmes, en vue de les analyser algébriquement. Cet objectif a constitué le fil directeur de cette thèse.

Contributions

Cette thèse s'articule autour de 4 chapitres. Les deux premiers constituent un ensemble de rappels théoriques et fondamentaux, d'une part, sur les propriétés algébriques des demi-anneaux idempotents aussi appelés dioïdes dans le chapitre 1 et, d'autre part, sur la théorie des systèmes linéaires et la modélisation de tels systèmes.

Les structures algébriques de dioïde nous ont semblé tout particulièrement adaptées à l'étude de systèmes à événements discrets et plus précisément de systèmes de production manufacturière. La majorité des résultats présentés sont classiques et ont été introduits pour faire de cette thèse un tout autonome.

Le chapitre 2, expose les moyens de représenter formellement des SdP de manière graphique, à l'aide du formalisme des réseaux de Petri, et analytique, en prenant pour bases des structures algébriques de dioïdes. En nous basant sur une approche reconnue, nous montrons qu'il existe une équivalence entre les graphes d'événements temporisés et certains dioïdes correspondants. Mais les GET ne permettent pas de modéliser les conflits. C'est pourquoi nous contournons ce problème en utilisant des GET avec incertitudes temporelles, et le dioïde des intervalle qui leur correspond. La majeure partie des approches et méthodes de calcul sont connues et largement utilisées. Nous avons cependant formulé à notre connaissance dans la définition 42 la première formalisation de la sémantique des réseaux de GET avec incertitudes temporelles.

L'ensemble de ces rappels a permis de décrire dans les deux chapitres suivants les modélisations linéaires de deux types de conflits dans des structures algébriques de dioïdes. Plusieurs approches ont été proposées dans la littérature mais aucune ne sous satisfait réellement. Dans le cadre d'un routage entre plusieurs sous-systèmes, nous proposons une méthode pour trouver la politique de routage permettant d'obtenir la meilleure cadence pour le système global. Il n'est donc pas nécessaire de la connaître à priori. Par ailleurs, nous permettons de modéliser des politiques d'affectation dynamiques entre sous-systèmes partageant les mêmes ressources, formant un système global plus complexe que ceux

de type RdP à choix libres utilisés dans la plupart des approches identifiées. L'originalité de cette étude a été de considérer une approximation du comportement entrée-sortie des systèmes étudiés, en les encadrant par des intervalles afin d'en obtenir une représentation formelle et linéaire dans un dioïde d'intervalles.

Le chapitre 3 porte sur la modélisation d'un phénomène de routage entre plusieurs systèmes parallèles. L'enjeu ici est de modéliser un tel phénomène, en fonction d'une politique de routage fixée au préalable. Notre contribution a été de montrer l'existence de deux systèmes linéaires permettant d'encadrer le comportement d'un système mono-entrée/mono-sortie composé de plusieurs sous-systèmes parallèles en conflit sur la même entrée, à condition d'utiliser une fonction de routage « périodique » ou « équilibrée » entre ces sous-systèmes. Dans le contexte de la gestion de production, il est par ailleurs possible de choisir un routage garantissant au système global une cadence donnée et tel que l'incertitude d'approximation liée à l'analyse par intervalles soit minimale.

Le deuxième phénomène de conflit, abordé dans le chapitre 4, traite les cas de partage de ressources entre plusieurs systèmes parallèles. Le caractère fini des ressources partagées impose des contraintes pour le système, qui ne sont pas prévisibles lorsque l'affectation de ces ressources se fait de manière dynamique. En effet, dans ce cas les ressources sont attribuées en fonction de l'arrivée de produits, ayant chacun sa propre gamme. Ces arrivées n'étant pas connues à l'avance dans notre cas, il n'est pas possible de prévoir la manière dont se comporteront les ressources. Il n'est donc possible que de prévoir de manière approchée le comportement global de systèmes incluant des partages de ressources. Il s'agit de considérer ce comportement dans le meilleur cas (pas de conflit, les ressources ne sont jamais épuisées à l'arrivée de nouveaux produits) et dans le pire cas (il y a en permanence des produits en attente de traitement), en utilisant une politique d'affectation particulière des ressources dans ce dernier cas. Nous montrons que pour ce type de conflits, il est aussi possible de modéliser le comportement formel entrée-sortie du système global dans un dioïde d'intervalles.

En résumé, nous avons montré qu'il est possible de considérer d'une manière linéaire dans un dioïde certains systèmes de production présentant des conflits.

Perspectives

Nous n'avons cherché à modéliser que des systèmes de production présentant un seul type de conflits. Mais rien n'empêche les systèmes réels de comporter à la fois plusieurs conflits de plusieurs types (par exemple des zones de convergence de deux lignes de production où les palettes ne peuvent pas se chevaucher ou bien des points d'aiguillages où les palettes sont routées selon leurs contenus). Par composition de systèmes, il paraît réalisable de définir de tels systèmes complexes à l'aide de notre approche, mais on peut légitimement se demander si l'approximation du comportement de ces systèmes globaux ne deviendrait pas trop imprécise, par combinaison des approximations de chaque modèle de conflit, et si ces modèles ne perdraient pas de leur intérêt.

Une autre direction concerne le partage de ressources par plus de deux processus concurrents. En se basant sur une politique d'affectation des ressources similaire, il paraît vraisemblable que l'incertitude liée à ce partage soit cette fois-ci bornée par la somme des temps de production des systèmes en concurrence.

Notons pour finir que tous les développements ont été effectués dans un

cadre purement théorique. Une autre perspective majeure est d'éprouver notre approche sur un cas d'application industriel. Ce démonstrateur permettrait par la suite de tester des techniques de commandes, synthétisées à partir de la modélisation du système issue de notre approche, afin de maîtriser ses flux et sa production.

Annexes

Annexe A

Compléments sur les systèmes linéaires

Certains aspects de la théorie des systèmes linéaires dont nous nous sommes servis ne sont pas d’une importance fondamentale pour la compréhension des propos et raisonnements tenus dans cette thèse. Ces premiers ont été regroupés dans cette annexe, afin de donner des éléments supplémentaires aux lecteurs intéressés.

Nous donnons dans un premier temps les hypothèses que nous avons considérées dans nos études. Grâce à elles, il est possible de proposer une modélisation bien particulière des systèmes. Ensuite, on présente des notions de la théorie des signaux et ses applications aux structures algébriques de dioïdes, car les systèmes que nous étudions peuvent à juste titre être considérés dans des espaces de signaux. Enfin, un rappel sur l’analyse spectrale est proposé, en montrant que la valeur propre de matrices représentant des systèmes de production correspond très exactement à une donnée importante de ces systèmes : leurs cadences de production.

A.1 Hypothèses de fonctionnement et modèles algébriques

A.1.1 Conditions initiales canoniques

Les conditions initiales canoniques correspondent, par convention, au fait que les dates des événements ayant eu lieu avant la première observation¹ sont considérées égales à $-\infty$. L’état initial du système peut donc être le résultat d’un certain nombre d’événements arrivés auparavant dont on fait abstraction.

Du fait de la non prise en compte des événements ayant pu avoir lieu avant le début de l’observation du système, les jetons initiaux des différentes places seront supposées disponibles depuis « l’origine des temps », c’est-à-dire depuis la date $-\infty$.

Ainsi les vecteurs $T(k) = (t_1(k) \ \cdots \ t_{\text{Card}(\mathcal{T})}(k))^T$, basé sur des dateurs, et $\widehat{T}(t) = (\widehat{t}_1(t) \ \cdots \ \widehat{t}_{\text{Card}(\mathcal{T})}(t))^T$, basé sur des compteurs, définissent de

1. c’est-à-dire des événements numérotés négativement

nouveaux vecteurs d'état pour les GET. Rappelons que ces variables d'état sont isotones : $\forall t \in \mathcal{T}, t(k+1) \succcurlyeq t(k)$ et $\widehat{t}(t+1) \succcurlyeq \widehat{t}(t)$.

Les conditions initiales présentées ici sont les plus petites possibles, et ont donc les plus petites influences sur les équations représentant les systèmes, basées sur des dateurs ou des compteurs. De plus, si la date d'un k^{e} événement au niveau de la transition t_i est égal à $+\infty$, cela signifie, aussi par convention, que cet événement (ainsi que tous ceux qui le suivent) n'auront jamais lieu dans le cadre de notre observation.

A.1.2 Mode de fonctionnement FIFO

Il est nécessaire de déterminer comment les jetons sont exploités par les différentes transitions. Il est possible d'obtenir une représentation formelle dans un diode en précisant les conditions de fonctionnement d'un GET.

On considérera tout d'abord que le k^{e} jeton rentré dans une place sera également le k^{e} à contribuer au franchissement de la transition aval correspondante. Ainsi le premier jeton arrivé dans une place sera aussi le premier à en sortir ; ce mode de fonctionnement est appelé FIFO (pour "First In, First Out" en anglais).

Cette hypothèse de fonctionnement permet d'établir un système d'inéquations sur les variables d'états que nous venons de définir, les dateurs et les compteurs. Avant d'étudier des cas plus complexes, nous allons présenter les systèmes d'inéquations décrivant les états des deux graphes élémentaires de la figure A.1.

L'activation d'une transition dans un graphe d'événements provoque la consommation d'un jeton dans chacune de ses places amont. Elle peut être répétée jusqu'à ce que l'une de ces places soit vide, c'est-à-dire un nombre de fois égal au *minimum* des quantités des jetons contenus dans les places amont correspondantes. Inversement, la date d'activation d'une transition est dictée par la date de disponibilité la plus tardive, donc maximale, des jetons dans les places amont. Ainsi, par exemple, dans un atelier de production, la fabrication de biens est limitée par la ressource en plus faible quantité, et la date de réalisation d'un objet ne peut être inférieure au plus long des temps de mise à disposition de ses constituants.

La figure A.1 (a) représente un phénomène de rendez-vous. En effet, le tir de la transition t_3 est dépendant à la fois des tirs des transitions t_1 et t_2 . Qui plus est, l'une des deux places contient initialement un jeton. Ainsi la date au plus tôt de la k^{e} activation de la transition t_3 est conditionnée par la date de la $k-1^{\text{e}}$ activation de t_1 et de la k^{e} activation de t_2 . En outre, le nombre de fois où la transition t_3 pourra être tirée à une date t donné est dépendant du nombre de jetons dans ses places amont. Or la place entre les transitions t_1 et t_3 contient initialement un jeton. Donc à cette date t le nombre de jetons dans cette place est égal au nombre de fois où la transition t_1 aura été tirée entre temps, auquel on ajoute un. Le nombre de fois où la transition t_3 peut être tirée à la date t est en conséquence inférieur au minimum de cette valeur et du nombre de fois où la transition t_2 est tirée à cette même date t . En considérant qu'un jeton peut rester indéfiniment dans une place, nous obtenons les inéquations suivantes :

$$\begin{cases} t_3(k) \succcurlyeq \max(t_1(k-1), t_2(k)) \\ \widehat{t}_3(t) \preccurlyeq \min(\widehat{t}_1(t) + 1, \widehat{t}_2(t)) \end{cases} \quad \begin{matrix} (A.1) \\ (A.2) \end{matrix}$$

Une synchronisation est réalisée par le biais de l'opération max quand on date les événements et de l'opération min quand on les compte.

Le phénomène de délai décrit par la figure A.1 (b) retranscrit une dépendance directe entre les tirs des transitions t_4 et t_5 . Le temps de séjour (minimal) attaché à la place entre ces deux transitions doit être pris en compte, ainsi que le nombre de jetons éventuellement présents initialement dans cette même place. On obtient donc les inéquations suivantes :

$$\begin{cases} t_5(k) \succcurlyeq t_4(k-2) + \tau \\ \widehat{t}_5(t) \preccurlyeq \widehat{t}_4(t-\tau) + 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (A.3) \\ (A.4) \end{matrix}$$

Les inéquations (A.1) à (A.4) sont vérifiées pour n'importe quelle séquence de tir des transitions t_1 à t_5 . Elle permettent donc de considérer toute évolution possible du réseau.

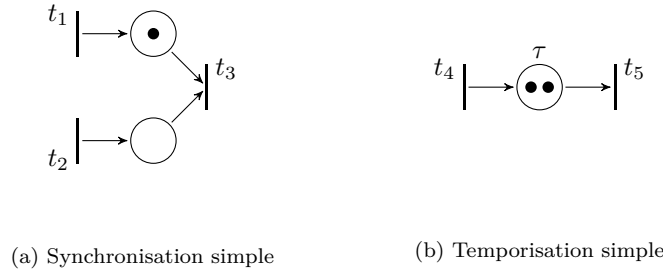


FIG. A.1 – Synchronisation et temporisation élémentaires

Néanmoins, un système composé d'inéquations retranscrit un espace d'état bien trop grand pour être manipulé efficacement. Nous allons donc considérer un cas *limite* de fonctionnement pour les transitions de ce système, appelé fonctionnement au plus tôt.

A.1.3 Fonctionnement au plus tôt

Définition 56 (Fonctionnement au plus tôt). *En reprenant la notation 4 de la page 43, une politique de tir « au plus tôt » correspond au mode de fonctionnement suivant pour un GET :*

- Les transitions de l'ensemble $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ sont franchies dès qu'elles sont franchissables.
- Les transitions de l'ensemble \mathcal{U} sont en permanence franchissables, mais ne sont franchies que selon une loi d'entrée déterminée, à intervalles de temps réguliers ou aléatoires.

Ainsi, selon cette hypothèse supplémentaire de fonctionnement, seules les transitions d'entrée sont franchies suite à des événements externes. Nous verrons que l'on peut assimiler certaines séquences d'entrées à des commandes, par analogie à la théorie de la commande.

Sous les hypothèses d'un fonctionnement FIFO au plus tôt, l'évolution des composantes des vecteurs d'états est donc déterminée par les équations suivantes :

– Représentation par des dateurs :

$$\begin{cases} t_3(k) = \max(t_1(k-1), t_2(k)) \\ t_5(k) = t_4(k-2) + \tau \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

– Représentation par des compteurs :

$$\begin{cases} \hat{t}_3(t) = \min(\hat{t}_1(t) + 1, \hat{t}_2(t)) \\ \hat{t}_5(t) = \hat{t}_4(t - \tau) + 2 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Ces équations se récrivent facilement dans les dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$. Dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$, le système (A.5), basé sur des dateurs, se met sous la forme :

$$\begin{cases} t_3(k) = t_1(k-1) \oplus t_2(k) \\ t_5(k) = t_4(k-2) \otimes \tau \end{cases}.$$

Le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$, quant à lui, permet de manipuler des équations aux compteurs. Ainsi le système (A.6) se récrit comme suit :

$$\begin{cases} t_3(t) = (t_1(t) \otimes 1) \oplus t_2(t) \\ t_5(t) = t_4(t - \tau) \otimes 2 \end{cases}.$$

Remarque 35. *Les parenthèses dans le système précédent ne sont pas nécessaires, car la loi \oplus ne distribue pas par rapport à la loi \otimes . Par ailleurs, on se permettra de noter les applications compteur de la même manière que les applications dateur² quand le contexte sera explicite, comme dans le système précédent.*

Remarque 36. *Comme on pouvait le pressentir à partir des équations (A.1) et (A.2), la loi \oplus correspond, dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ comme dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$, à la notion de synchronisation. La loi \otimes intervient, dans le premier cas, quand on ajoute un délai à une date et, dans le deuxième cas, quand on ajoute un jeton à une place (on permet un tir de plus de la transition aval correspondante).*

Définition 57 (Application linéaire). *Soit un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$. Une application $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ est dite linéaire si :*

$$\forall u, v, a, b \in \mathcal{D}, f(a \otimes u \oplus b \otimes v) = a \otimes f(u) \oplus b \otimes f(v) \quad (\text{A.7})$$

On peut donc interpréter les dateurs et compteurs comme des applications linéaires.

A.2 Signaux et réponses impulsionnelles

Par analogie avec la théorie du traitement du signal, un système peut être considéré dans un espace de signaux, à valeurs dans des dioïdes donnés. Cependant, il n'est pas possible de définir un espace vectoriel dans un dioïde.

2. c'est-à-dire sans signe diacritique

On présentera donc les moduloïdes, qui permettent néanmoins la définition de vecteurs et de matrices.

Une fois le dioïde des signaux défini, on montrera, qu'un système linéaire sur un dioïde peut être décrit, comme sur le corps des réels, par une application unique appelée réponse impulsionnelle. Cette section est essentiellement basée sur l'état de l'art présenté par Sébastien Lahaye dans sa thèse [Lah00].

A.2.1 Signaux et systèmes

Un signal est généralement défini comme une grandeur physique dépendant d'un paramètre (classiquement, le temps qui s'écoule), servant de support à une information à transmettre. De son côté, un système est une application d'un ensemble de signaux d'entrée vers un ensemble de signaux de sortie; il sert donc à transformer des signaux. Dans la théorie classique, les signaux sont généralement des fonctions à valeurs dans un corps $((\mathbb{R}, +, \times)$ par exemple). Si l'évolution du temps est continue, le signal peut être décrit par une fonction analytique définie sur \mathbb{R} , et si le temps suit une évolution discrète, le signal est en règle générale représenté par une séquence indexée sur \mathbb{Z} ou \mathbb{N} .

Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse à des systèmes activés par des signaux à valeurs, non pas dans un corps, mais dans un dioïde donné. D'autre part, nous verrons que les signaux considérés dépendent de paramètres prenant leurs valeurs dans des ensembles discrets et qui pourront être autres que l'évolution du temps.

Nous supposons désormais le dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ complet (cette hypothèse sera nécessaire, en rapport avec la remarque 39, et ne remet pas en cause la généralité des autres définitions de cette section).

Définition 58 (Signal). *On appelle signal une application de \mathbb{Z} dans $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$.*

En théorie des systèmes, l'ensemble des signaux est doté d'une structure d'espace vectoriel (auquel on associe un corps de scalaires). Comme les dioïdes sont des structures algébriques plus faibles que les corps, on ne peut pas y définir d'espace vectoriel. Cependant, Gondran et Minoux ont formalisé, dans le courant des années 70, la notion de moduloïde, pendant pour les dioïdes du module pour les anneaux, et correspondant à l'espace des vecteurs d'un dioïde [GM77]. Plus formellement, un moduloïde est la structure algébrique invariante à gauche sous l'action d'une matrice à coefficients dans un dioïde [Wag91].

Définition 59 (Moduloïde). *Soit $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ un dioïde où ε et e désignent les éléments neutres de \oplus et \otimes respectivement. On appelle moduloïde sur \mathcal{D} un ensemble \mathcal{M} muni d'une loi de composition interne noté \boxplus et d'une loi de composition externe notée \bullet satisfaisant les conditions suivantes :*

1. (\mathcal{M}, \boxplus) est un monoïde commutatif idempotent, dont l'élément neutre est noté ϵ ;
2. La loi \bullet a pour signature $\mathcal{D} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ et vérifie :
 - (a) $\forall \lambda \in \mathcal{D}, \forall x, y \in \mathcal{M} : \lambda \bullet (x \boxplus y) = (\lambda \bullet x) \boxplus (\lambda \bullet y)$.
 - (b) $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{D}, \forall x \in \mathcal{M} : (\lambda \oplus \mu) \bullet x = (\lambda \bullet x) \boxplus (\mu \bullet x)$.
 - (c) $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{D}, \forall x \in \mathcal{M} : \lambda \bullet (\mu \bullet x) = (\lambda \otimes \mu) \bullet x$.
 - (d) $\forall x \in \mathcal{M} : \begin{cases} e \bullet x = x \\ \epsilon \bullet x = \epsilon \end{cases}$.

$$(e) \quad \forall \lambda \in \mathcal{D}, \lambda \bullet \varepsilon = \varepsilon.$$

La somme d'un moduloïde est bien idempotente, car :

$$\forall a \in \mathcal{M}, a \boxplus a = (e \bullet a) \boxplus (e \bullet a) = (e \oplus e) \bullet a = e \bullet a = a.$$

La somme \boxplus de deux vecteurs est calculée de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \oplus y_1 \\ x_2 \oplus y_2 \\ \vdots \\ x_n \oplus y_n \end{pmatrix}.$$

De même, le produit (à gauche) \bullet par un scalaire est réalisé comme suit :

$$\forall \lambda \in \mathcal{D} : \lambda \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \otimes x_1 \\ \lambda \otimes x_2 \\ \vdots \\ \lambda \otimes x_n \end{pmatrix}.$$

Comme pour un dioïde, l'idempotence de \boxplus permet de doter un moduloïde d'une relation d'ordre canonique \succeq définie par :

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{M}, \alpha_1 \succeq \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_1 \boxplus \alpha_2.$$

Exemple 27 (Moduloïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{Z}}$). *L'ensemble des applications de \mathbb{Z} dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ muni du max point à point est un monoïde commutatif, noté ici (\mathcal{M}, \oplus) . Ce monoïde, doté de plus de la loi de composition externe :*

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{\mathbb{Z}} \times \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ (\alpha, x) &\mapsto \alpha \bullet x : t \in \mathbb{Z}, (\alpha \bullet x)(t) = \alpha \otimes x(t) = \alpha + x(t), \end{aligned}$$

est un moduloïde sur $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$, traditionnellement noté $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$.

On peut aussi définir un moduloïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{Z}}$ sur $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ en munissant l'ensemble des applications de \mathbb{Z} dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ du min point à point et de la même loi de composition externe que celle de $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$.

On peut maintenant définir l'ensemble des signaux dans un dioïde.

Définition 60 (Ensemble des signaux dans un dioïde). *L'ensemble des signaux $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$ dans un dioïde \mathcal{D} est un moduloïde muni des deux lois suivantes :*

- Une loi interne \oplus permettant d'additionner des signaux et définie par :

$$\forall u, v \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, \forall t \in \mathbb{Z}, (u \oplus_{\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}} v)(t) = u(t) \oplus_{\mathcal{D}} v(t).$$

- Une loi externe \bullet qui joue le rôle du produit (à gauche) d'un signal par un scalaire et définie par :

$$\forall a \in \mathcal{D}, u \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, \forall t \in \mathbb{Z}, (a \bullet u)(t) = a \otimes u(t).$$

Les applications dateur et compteur définies dans la section 2.2.1 sont donc des signaux, définis respectivement dans les moduloïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{Z}}$.

Remarque 37. Un dateur est un signal croissant de $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$. Par contre, en se rappelant la remarque 6 de la page 23, on verra un compteur comme un signal décroissant de $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{Z}}$.

Définition 61 (Produit de convolution). On définit le produit de convolution $*$ de deux signaux comme suit :

$$\forall u, v \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, \forall t \in \mathbb{Z}, (u * v)(t) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} u(s)v(t - s)$$

Le produit de convolution est commutatif si le dioïde sur lequel est basé $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$ l'est (cf. la définition 15).

Propriété 7 (Isotonie du produit de convolution). Le produit de convolution $*$ défini sur $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$ est isotone, c'est-à-dire $\forall a, b, c \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$, on a :

$$b \preceq c \Rightarrow a * b \preceq a * c.$$

Démonstration : Les loi \oplus et \otimes étant isotones, nous pouvons affirmer $\forall t, s \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} b(t) \preceq c(t) &\Rightarrow \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} a(s - t)b(t) \preceq \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} a(s - t)c(t) \\ &\Rightarrow (a * b)(s) \preceq (a * c)(s) \end{aligned}$$

□

De par les lois additives propres aux moduloïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{Z}}$. Quand on situe les calculs dans l'un ou l'autre de ces ensembles de signaux, on parle respectivement de produits « de sup-convolution » et « d'inf-convolution ».

Définition 62 (Dioïde de signaux). L'ensemble $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$ muni de la somme point à point et du produit de convolution est un dioïde, dont les éléments neutres sont respectivement définis par :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \varepsilon, \forall t \in \mathbb{Z}. \\ e(t) &= \begin{cases} e & \text{pour } t = 0, \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On considère généralement un système comme une « boîte noire » ayant un certain nombre d'entrées et de sorties. Ces entrées et ces sorties sont observées sous formes de signaux.

Remarque 38. Nous prenons initialement comme hypothèse que les systèmes considérés sont mono-variable (ou SISO). Nous généraliserons ensuite au cas multi-variables.

Communément, un système est dit linéaire s'il satisfait le principe de superposition [Mas87b], c'est-à-dire si sa réponse à la somme pondérée d'excitations en entrée est égale à la somme de même pondération de ses réponses à chacune des excitations [Lah00, LS01]. On a vu dans la définition précédente qu'un système pouvait à juste titre être considéré comme une application. La linéarité d'un système est donc fortement liée à celle d'une application linéaire (voir la définition 57). On définit formellement la linéarité d'un système à partir des lois de moduloïde définies sur l'ensemble des signaux.

Définition 63 (Système linéaire). *Un système S est une application $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, x \mapsto y = S(x)$. Il est dit linéaire sur le dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ si :*

$$\begin{cases} S(u \oplus_{\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}} v) = S(u) \oplus_{\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}} S(v), \forall u, v \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}} \\ S(a \bullet u) = a \bullet S(u), \forall u \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, \forall a \in \mathcal{D} \end{cases}$$

On a ainsi $(S(a \bullet u))(t) = a \otimes (S(u))(t), \forall t \in \mathbb{Z}$.

On parle ainsi de systèmes « $(\min, +)$ - » ou « $(\max, +)$ -linéaires » dans la littérature, en fonction du dioïde considéré.

Exemple 28 (Système linéaire élémentaire). *Un système linéaire élémentaire est le système Δ^s , dont la sortie y est égale à l'entrée u , retardée de s (avec $s \in \mathbb{Z}$).*

$$\forall t \in \mathbb{Z}, y(t) = (\Delta^s(u))(t) = u(t - s)$$

Comme il est usuellement fait en théorie des systèmes linéaires, on suppose que les systèmes étudiés sont continus, conformément à la définition suivante.

Définition 64 (Système continu). *Un système S est dit continu si, pour tout sous-ensemble fini ou infini d'éléments u_i de $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$, on a :*

$$S\left(\bigoplus u_i\right) = \bigoplus S(u_i).$$

Remarque 39. *Notons que cette définition n'est valide que si le dioïde \mathcal{D} est complet.*

On supposera donc systématiquement que tous les systèmes linéaires présentés dans le reste de ce thèse satisfont l'hypothèse de continuité.

Définition 65 (Système causal). *Un système S est dit causal si pour toutes les entrées u_1 et u_2 , on a :*

$$\forall \tau \in \mathbb{Z}, u_1(t) = u_2(t) \text{ pour } t \leq \tau \Rightarrow (S(u_1))(t) = (S(u_2))(t) \text{ pour } t \leq \tau.$$

Définition 66 (Système stationnaire). *Un système S est dit stationnaire (ou invariant dans le temps) si :*

$$\forall u \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, \forall s \in \mathbb{Z}, S(\Delta^s(u)) = \Delta^s S(u).$$

Concrètement, cela signifie que ses paramètres ne varient pas au cours du temps.

A.2.2 Réponse impulsionnelle

On va mettre en évidence dans cette partie (basée sur les travaux de Sébastien Lahaye [Lah00]) qu'un système linéaire défini sur $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$ peut être décrit par sa réponse impulsionnelle. Il s'agit donc tout d'abord de remarquer que tout signal peut s'exprimer comme la somme pondérée d'impulsions, en appliquant le principe de superposition [Mas87b]. Cette décomposition permet d'affirmer que la seule connaissance de la réponse du système à une impulsion (c'est-à-dire sa réponse impulsionnelle) suffit pour caractériser complètement le comportement entrée-sortie de ce système linéaire.

Nous allons voir que tout signal de $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$ peut être représenté sous la forme d'une somme pondérée d'impulsions retardées.

Définition 67 (Impulsion). *On appelle impulsion le signal*

$$e(t) = \begin{cases} e & \text{pour } t = 0, \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une impulsion particulière dont nous allons nous servir, notée δ , est l'impulsion de Dirac, d'après le nom du chercheur anglais Paul Dirac qui a inventé ce concept. En théorie des signaux, elle représente un signal d'une durée théoriquement nulle, d'énergie infinie, et d'intégrale sur \mathbb{R} égale à 1.

Définition 68 (Impulsion de Dirac retardée). *L'application notée δ^s jouera le rôle de l'impulsion de Dirac retardée en s . Elle s'exprime par la relation suivante :*

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \delta^s = (\Delta^s(e))(t) = e(t - s).$$

Remarque 40. *Il est alors aisé de vérifier que :*

$$\forall u \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, \forall t \in \mathbb{Z}, u(t) = (u * e)(t) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} u(s)e(t - s) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} u(s)\delta^s(t). \quad (\text{A.8})$$

Théorème 23 (Réponse impulsionnelle). *Soit S un système linéaire, dont les signaux d'entrée et de sortie sont respectivement notés $u(t)$ et $y(t)$. Il existe dans le dioïde commutatif \mathcal{D} une unique application $h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{D}$, appelée réponse impulsionnelle, telle que :*

$$\forall u \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, \forall t \in \mathbb{Z}, y(t) = (S(u))(t) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h(t, s)u(s).$$

Démonstration : Montrons tout d'abord l'existence de cette réponse impulsionnelle.

$$\begin{aligned} y(t) &= (S(u))(t) = \left(S \left(\bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} u(s)\delta^s \right) \right)(t) && (\text{par la relation (A.8)}) \\ &= \left(\bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} S(u(s)\delta^s) \right)(t) && (\text{par continuité de } S) \\ &= \left(\bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} u(s)S(\delta^s) \right)(t) && (\text{par linéarité de } S) \\ &= \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} u(s)(S(\delta^s))(t) \\ &\text{puis en posant } h(t, s) \triangleq (S(\delta^s))(t), \\ &= \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h(t, s)u(s). && (\mathcal{D} \text{ étant commutatif}) \end{aligned}$$

Montrons ensuite l'unicité. Supposons qu'il existe une autre application h' qui vérifie : $y(t) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h'(t, s)u(s)$. En appliquant $u = \delta^s$ en entrée du système, on a :

$$\begin{aligned} h(t, s) &= (S(\delta^s))(t) && (\text{par définition de } h) \\ &= \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} h'(t, \tau)\delta^s(\tau) && (\text{par définition de } S, \text{ pour } h') \\ &= \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} h'(t, \tau)e(\tau - s) && (\text{par définition de } \delta^s) \\ &= h'(t, s). && (\text{par définition de l'impulsion } e) \end{aligned}$$

On constate donc que les deux applications h et h' sont identiques, ce qui termine la démonstration. \square

$h(t, s)$ s'interprète précisément comme la valeur de la sortie du système à l'instant t , en réponse à une impulsion appliquée en entrée à l'instant s .

Nous allons maintenant caractériser la causalité et la stationnarité d'un système.

Théorème 24 (Causalité d'un système). *Un système S est dit causal si et seulement si sa réponse impulsionnelle est telle que $h(t, s) = \varepsilon$, pour $t < s$.*

Démonstration :

(\Leftarrow) Pour $t < s$, on a $\delta^s(t) = \varepsilon(t) = \varepsilon$. Si par ailleurs le système est causal (cf. la définition 65), alors on vérifie :

$$h(t, s) = (S(\delta^s))(t) = (S(\varepsilon))(t) = \varepsilon.$$

(\Rightarrow) Soient $h(t, s) = \varepsilon$ pour $t < s$ et deux entrées u_1 et u_2 telles que $u_1 = u_2$ pour $t \leq s$. On a donc :

$$\begin{aligned} (S(u_1))(t) &= \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} h(t, \tau) u_1(\tau) \\ &= \bigoplus_{\tau \leq t} h(t, \tau) u_1(\tau) \quad (\text{car } h(t, \tau) = \varepsilon \text{ pour } \tau > t) \\ &= \bigoplus_{\tau \leq t} h(t, \tau) u_2(\tau) \quad (\text{pour } \tau \leq t \leq s, u_1(\tau) = u_2(\tau)) \\ &= \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} h(t, \tau) u_2(\tau) \quad (\text{par ajout de valeurs « nulles »}) \\ &= (S(u_2))(t). \end{aligned}$$

\square

En d'autres termes, le théorème précédent indique que si une impulsion est appliquée à l'instant s en entrée d'un système causal, alors l'influence sur sa sortie est nulle (égale à ε) avant cet instant. Ceci traduit de façon plus générale le fait qu'un système causal est « non anticipatif ».

Théorème 25 (Stationnarité d'un système). *Un système S est dit stationnaire si et seulement si sa réponse impulsionnelle h est telle que :*

$$\forall t, s, \tau \in \mathbb{Z}, h(t + \tau, s + \tau) = h(t, s). \quad (\text{A.9})$$

Démonstration :

(\Rightarrow) Supposons le système stationnaire (voir la définition 66), on a :

$$\begin{aligned} h(t + \tau, s + \tau) &= (S(\delta^{s+\tau}))(t + \tau) \\ &= (\Delta^{-\tau}(S(\delta^{s+\tau}))) (t) \\ &= (S(\Delta^{-\tau}(\delta^{s+\tau}))) (t) \quad (\text{par définition de la stationnarité}) \\ &= (S(\delta^s))(t) \\ &= h(t, s). \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Comme $h(t + \tau, s + \tau) = \left(\Delta^{-\tau} (S(\delta^{s+\tau})) \right)(t)$, et $h(t, s) = (S(\delta^s))(t) = \left(S(\Delta^{-\tau}(\delta^{s+\tau})) \right)(t)$, l'égalité (A.9) implique la stationnarité du système. \square

Notation 8 (Réponse impulsionnelle et représentation entrée-sortie). *Pour un système stationnaire, en choisissant $\tau = -s$ dans l'égalité (A.9), on obtient :*

$$\forall t, s \in \mathbb{Z}, h(t, s) = h(t - s, 0).$$

Ce qui signifie que la réponse à l'instant t à une impulsion appliquée à l'instant s dépend, dans le cas d'un système stationnaire³, uniquement du laps de temps écoulé entre s et t . En d'autres termes, la réponse impulsionnelle d'un système stationnaire est fonction de ce seul laps de temps, et par abus de notation, on note couramment :

$$h(t - s, 0) = h(t - s).$$

La sortie d'un système stationnaire peut alors s'exprimer sous la forme d'un produit de convolution de la réponse impulsionnelle et de l'entrée comme suit :

$$y(t) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h(t - s)u(s) = (h * u)(t). \quad (\text{A.10})$$

A.2.3 Extension matricielle

Les résultats présentés jusqu'ici se généralisent de façon naturelle aux systèmes MIMO. Pour plus de clarté, nous noterons \mathcal{E} l'ensemble $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$. Pour un système linéaire comportant n entrées et m sorties, on note les signaux d'entrée et de sortie de la manière suivante :

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix},$$

avec $U_i, Y_j \in \mathcal{E}$ pour tous $i \in [1, n]$ et $j \in [1, m]$.

Théorème 26 (Réponse impulsionnelle dans le cas matriciel). *Soit $S : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^m$ un système linéaire. Il existe une unique réponse impulsionnelle H telle que :*

$$\forall U \in \mathcal{E}^n, \forall t \in \mathbb{Z}, Y(t) = (S(U))(t) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} H(t, s)U(s),$$

où $H(t, s) \in \mathcal{D}^{m \times n}$.

Démonstration : Le système étant linéaire, il existe, d'après le théorème 23, entre chaque entrée U_i et chaque sortie Y_j une unique réponse impulsionnelle, notée H_{ij} . Les autres signaux d'entrée U_l (avec $l \neq i$) sont considérés nuls pour H_{ij} ($\forall t \in \mathbb{Z}, U_l = \varepsilon(t) = \varepsilon$).

3. c'est-à-dire quand ses paramètres n'évoluent pas au cours du temps

D'autre part, tout signal $U \in \mathcal{E}^n$ peut s'écrire comme la somme suivante :

$$U = \tilde{U}_1 \oplus \tilde{U}_2 \oplus \cdots \oplus \tilde{U}_n, \text{ avec } \tilde{U}_i = (\varepsilon \quad \cdots \quad \varepsilon \quad U_i \quad \varepsilon \quad \cdots \quad \varepsilon)^T, i \in [1, n].$$

En appliquant le principe de superposition [Mas87b], on obtient pour la sortie Y_j , $\forall U \in \mathcal{E}^n, \forall t \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} Y_j(t) &= (S(U))_j(t) \\ &= \left(S \left(\bigoplus_{i=1}^n \tilde{U}_i \right) \right)_j(t) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n (S(\tilde{U}_i))_j(t) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} H_{ij}(t, s) \tilde{U}_i(s) \quad (\text{d'après le théorème 23}) \\ &= \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{i=1}^n H_{ij}(t, s) \tilde{U}_i(s) \end{aligned}$$

On en déduit l'existence et l'unicité de H donnée par :

$$(H(t, s))_{ij} = H_{ij}(t, s). \quad (\text{A.11})$$

□

En utilisant la relation (A.11), les conditions de causalité et de stationnarité s'établissent directement à partir des théorèmes 24 et 25. En l'occurrence, un système $S : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^m$ linéaire est

- causal, si et seulement si sa réponse impulsionnelle est telle que :

$$H(t, s) = \varepsilon \text{ pour } t < s;$$

- stationnaire, si et seulement si sa réponse impulsionnelle est telle que :

$$\forall \tau \in \mathbb{Z}, H(t + \tau, s + \tau) = H(t, s).$$

Remarque 41. Dans la réalité, tous les signaux physiquement mesurés sont causaux puisqu'ils n'existent qu'à partir du moment où on les observe.

Si le système est stationnaire, sa sortie peut s'exprimer sous la forme d'un produit de convolution de sa réponse impulsionnelle H et du vecteur de signaux d'entrée U :

$$Y(t) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} H(t - s) U(s) = (H * U)(t). \quad (\text{A.12})$$

Pour clore cette section, nous pouvons maintenant préciser que l'on suppose les systèmes étudiés stationnaires (cf. la définition 66) ; ils sont indépendants de l'origine des temps considérée. Notons que des systèmes non stationnaires ont été étudiés dans des structures algébriques de dioïdes dans [Lah00].

A.3 Valeurs propres de matrices pour l'évaluation de performance

Il est possible d'évaluer les performances d'un système (de production) d'un simple point de vue algébrique, en ayant la seule connaissance de ses caractéristiques, comme sa réponse impulsionnelle; il n'y a donc pas besoin de le simuler pour en donner une évaluation. Pour cela, nous abordons dans cette section les calculs liés à la valeur propre d'une matrice, qui nous donnera un certain nombre d'informations concernant la cadence du système modélisé par cette matrice. La théorie spectrale consiste en l'étude de valeurs et vecteurs propres de matrices positives. Tous ces résultats sont classiques et s'appliquent sans difficulté au contexte des dioïdes [CDQV83], où il n'existe pas de nombre « négatifs »⁴. Nous ne donnerons donc pas les démonstrations, qui pourront être trouvées dans [GM02, chapitre 6], [BCOQ92, section 3.2.4] ou [Gau92, chapitre IV]. L'analyse spectrale des matrices dans les dioïdes repose sur l'interprétation de ces matrices en terme de graphes. Nous commençons par quelques rappels concernant la théorie des graphes, pour finir par des considérations algorithmiques quant aux calculs des valeurs propres.

A.3.1 Définitions et propriétés

Les matrices dont nous cherchons les valeurs propres ne sont pas choisies au hasard. Ce sont généralement les matrices A représentant les états des systèmes étudiés. Une manière de définir ces matrices est présentée dans la section précédente. Nous pourrions donc obtenir des informations concernant ces systèmes dans leur globalité. Mais pour refléter la généralité des résultats énoncés, nous étudions dans cette section des matrices M génériques à coefficients dans un dioïde \mathcal{D} , pouvant être par exemple $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$.

Définition 69 (Graphe de précédence). *On appelle graphe de précédence d'une matrice carrée M , d'ordre n à coefficients m_{ij} dans \mathcal{D} , le graphe $G(M)$ formé d'un ensemble S de n sommets et des arcs orientés $(j, i) \in S^2$ lorsque $m_{ij} \neq \varepsilon$.*

Le coefficient m_{ij} doit être vu comme le poids attaché à l'arc (j, i) de $G(M)$.

Remarque 42 ([Gau92]). *Il est à noter l'inversion entre les indices des arcs (j, i) et les coefficients de la matrice M (notés m_{ij}). Grâce à elle, seule la définition du produit à gauche d'un moduloïde est nécessaire (cf. la définition 59).*

Exemple 29. *Nous avons déjà présenté à la figure 1.3 un exemple de graphe de précédence d'une matrice à coefficients dans un dioïde.*

Définition 70 (Chemin et circuit d'un graphe). *On appelle un chemin de j à i une suite de sommets et d'arcs reliant les sommets j et i . Un circuit est un chemin allant d'un sommet à ce sommet lui-même. On note $j \rightsquigarrow i$ le fait qu'il existe un chemin de j à i .*

La longueur et le poids d'un chemin sont respectivement le nombre d'arcs et l'addition des poids des arcs constituant ce chemin. Le poids moyen d'un chemin est donc son poids divisé par sa longueur.

⁴. comme ε , l'élément neutre de la loi \oplus , est le plus petit élément de l'ensemble, pour $x \neq \varepsilon$, il n'existe pas de x' tel que $x' \oplus x = \varepsilon$

Ainsi, dans le cas des diodes $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$, on vérifie que le coefficient m_{ij}^k de la matrice M^k est le poids minimal ou maximal des chemins de longueur k allant de j à i .

Définition 71 (Composante fortement connexe). *On définit une relation d'équivalence⁵ \sim sur S par :*

$$i \sim j \iff i \rightsquigarrow j \text{ et } j \rightsquigarrow i.$$

Les classes d'équivalence ainsi formées sont appelées composantes fortement connexes de $G(M)$.

Définition 72 (Matrice irréductible). *Une matrice M dont le graphe de pré-cédence ne possède qu'une seule composante fortement connexe est dite irréductible ; autrement, elle est qualifiée de réductible.*

Suite à ces quelques rappels de théorie des graphes, considérons un GET dont la forme récurrente explicite sur \mathcal{D} a pour équation d'état :

$$X(k) = AX(k-1) \oplus BU(k), \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Le régime autonome du système décrit par ce GET correspond au cas où ses commandes (ses entrées) ne contraignent pas les évolutions du système. Dans ce cas, toutes ses entrées sont en permanence suffisamment pourvues en matière première. On peut considérer cela comme un nombre infini de tirs de toutes ses transitions d'entrées u_i à la date $-\infty$, soit par exemple le vecteur d'entrée $U(k) = (-\infty \ \cdots \ -\infty)^T, \forall k \in \mathbb{Z}$. En régime autonome, l'évolution de l'état du système s'exprime donc simplement par la récurrence suivante :

$$X(k) = MX(k-1) = M^k X(0). \quad (\text{A.13})$$

En analyse spectrale, les valeurs et vecteurs propres de matrices peuvent être regroupées sous forme de couples (λ, ν) où ν est appelé vecteur propre d'une matrice M pour la valeur propre λ , avec $\nu \neq (-\infty \ \cdots \ -\infty)^T$. Pour un couple (λ, ν) d'une matrice M donnée, on a :

$$M \bullet \nu = \lambda \bullet \nu.$$

En considérant l'évolution de l'état du système en régime autonome, si λ est valeur propre de M et $X(0)$, le vecteur d'état initial, est vecteur propre de A , alors

$$X(k) = \lambda X(k-1) = \lambda^k X(0). \quad (\text{A.14})$$

Remarque 43. *Dans le corps des réels, on a donc la relation $x_i(k) = \lambda + x_i(k-1)$, pour chacune des transitions du GET. Autrement dit, toutes les variables d'état sont incrémentées de λ lorsque que k est incrémenté de 1. L'interprétation physique, pour un système de production, de cette relation est la production d'un produit toutes les λ unités de temps. λ est donc le temps de cycle du GET, c'est-à-dire l'inverse de la cadence de ce système. Pour ce cas particulier où $X(0)$ est un vecteur propre de M , le système est en régime permanent sans passer par une phase de régime transitoire.*

5. à la fois réflexive, transitive et symétrique

L'analyse spectrale nous permet donc de fournir un critère de performance des systèmes de production modélisés.

Les dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ ont des propriétés particulières : le monoïde (\mathcal{D}, \otimes) est en fait un groupe et le calcul de la racine p^e d'un élément ($\forall p \in \mathbb{N}$) y est donc possible. Considérons la propriété (π) suivante, valable $\forall p \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathcal{D}$:

(π) : l'équation $x^p = a$ possède une solution unique dans \mathcal{D} , notée $a^{1/p}$.

Nous pouvons maintenant définir le rayon spectral $\rho(M)$ d'une matrice M .

Définition 73 (Rayon spectral). *Soit $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ un dioïde ayant une structure de groupe pour le monoïde (\mathcal{D}, \otimes) avec la propriété (π) . Le rayon spectral de M est la quantité :*

$$\rho(M) = \bigoplus_{k=1}^n \left(\text{tr}(M^k) \right)^{1/k},$$

où $\text{tr}(M^k)$ désigne la trace de la matrice M^k , c'est-à-dire la somme (au sens de \oplus) de ses éléments diagonaux.

Le théorème suivant, dû à Gondran et Minoux, est un résultat classique concernant les matrices irréductibles.

Théorème 27 ([GM77, CDQV83]). *Si une matrice M à coefficients dans \mathcal{D} est irréductible, alors elle admet pour unique valeur propre λ son rayon spectral $\rho(M)$.*

En d'autres termes, λ correspond généralement au poids moyen minimum ou maximum des circuits de $G(M)$.

$$\begin{cases} \lambda = \min_{k \in [1, n]} \min_{i_k \in S} \frac{M_{i_1 i_2} + M_{i_2 i_3} + \dots + M_{i_k i_1}}{k} & \text{dans } \overline{\mathbb{Z}}_{\min}, \\ \lambda = \min_{k \in [1, n]} \max_{i_k \in S} \frac{M_{i_1 i_2} + M_{i_2 i_3} + \dots + M_{i_k i_1}}{k} & \text{dans } \overline{\mathbb{Z}}_{\max}. \end{cases}$$

Par analogie avec la notion de chemin critique (pour les problèmes d'ordonnancement statiques de type PERT [Gia88, Chapitre 4]), les circuits possédant ce poids sont appelés « circuits critiques » du système. Ce sont les circuits critiques qui limitent les performances du système et la valeur $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\rho(A)}$ est la cadence maximale qui puisse être obtenue pour le système global.

Le théorème 27 est connu comme étant l'analogue du théorème de Perron-Frobenius, qui considère des matrices à coefficients dans \mathbb{R}^+ (cf. [Gan59, Bap98] et [GP97, Section 3.7]).

Remarque 44 (Cas réductible). *La cas plus général où M est réductible a été traité dans la thèse de Stéphane Gaubert [Gau92]. Les résultats énoncés dans le cas réductible s'appuient sur une décomposition du graphe de précedence de M en composantes fortement connexes, chacune de ses composantes pouvant avoir une valeur propre donnée. En particulier, si M est réductible, la formule précédente donne la plus grande valeur propre.*

La généralisation à des cas de dimension infinie a été traité dans [MS92, KM97, AGW05]. L'analyse spectrale a aussi été étudiée dans d'autres dioïdes

que les « classiques » $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$. Geert Jan Olsder a par exemple réalisé cette étude dans le dioïde « min-max » [Ols91, Ols93].

L'établissement d'une valeur propre de M permet d'évaluer le comportement périodique d'un GET en régime autonome lorsque la condition initiale $X(0)$ est vecteur propre. Il est légitime de se demander comment se comporte le graphe (et donc le système) pour une condition initiale quelconque, c'est-à-dire quand $X(0)$ n'est pas vecteur propre de M . La définition suivante fournit une aide pour l'interprétation de la réponse à cette question.

Définition 74 (Cyclicité [CDQV83, Section 4.3]). *Pour toute matrice irréductible M à coefficients dans \mathcal{D} et de valeur propre λ , il existe deux entiers c et N (avec N strictement positif) tels que*

$$M^{n+c} = \lambda^c \bullet M^n, \forall n \geq N.$$

L'entier c est appelé cyclicité de M . On dit aussi que M est périodique d'ordre M .

Si M est irréductible, on peut donc écrire en régime autonome :

$$\begin{aligned} X(k) &= M^{n+c} X(k - n - c) \\ &= \rho(M) \bullet X(k - c). \end{aligned}$$

Autrement dit, en régime autonome, pour k suffisamment grand (c'est-à-dire $k \geq N$),

$$X(k + c) = c \times \lambda + X(k).$$

Ainsi, la définition 74 nous permet de dire que le système atteint, après un régime transitoire fini⁶, un régime périodique dans lequel sa cadence correspond à sa valeur propre, que l'on peut calculer algébriquement. En d'autres termes, quand le réseau est dans un état correspondant à un vecteur propre de la matrice représentant sa réponse impulsionnelle, le passage à l'état suivant, sous l'action de la matrice, consiste à activer toutes les transitions du GET représentant ce système un nombre de fois égal à la valeur propre, dans un modèle fait de compteurs, ou à décaler toutes les dates de la même quantité, dans un modèle fait de dateurs. L'évolution d'un réseau dans un état propre est ainsi synchronisée et périodique. Il est à noter qu'une étude similaire sur les cadences des systèmes de production était déjà menée par Raymond A. Cuninghame-Green dans les années 60 [CG62].

A.3.2 Considérations algorithmiques

Un état de l'art plus conséquent concernant les algorithmes permettant d'obtenir la valeur propre d'une matrice dans un dioïde peut être trouvé en annexe B.2. Nous ne ferons donc que survoler ici le moyen de calculer de la valeur propre d'une matrice.

Si l'on dispose de la valeur propre d'une matrice, on peut grandement accélérer les calculs permettant d'obtenir les états futurs du système correspondant. En effet, son évolution ne passe plus par l'équation (A.13), basée sur la n^e puissance d'une matrice, mais par l'équation (A.14), basée sur la n^e puissance d'un scalaire.

6. après la production de N produits

L'algorithme le plus connu et le plus utilisé est celui de Richard M. Karp, conçu à la fin des années 70 [Kar78]. Sa complexité est en $O(n^3)$, où n est le nombre de sommet du graphe considéré. À l'heure actuelle, cet algorithme présente toujours l'un des meilleurs compromis entre temps d'exécution, facilité d'implantation sur machine et généricité de la méthode.

Par ailleurs, on pourra noter que la longueur du régime transitoire ne peut pas être estimée à priori. Même pour un très petit système, la phase transitoire peut être arbitrairement longue. Ainsi une simulation sur ordinateur peut mettre un temps considérablement long à fournir des évaluations correctes de la cadence de production d'un système, alors que le calcul algébrique fournissant ce résultat peut être très simple, en utilisant par exemple l'algorithme de Karp [Coh95, Section 8.5.2].

Annexe B

Compléments de bibliographie sur la théorie des dioïdes

Certains aspects bibliographiques ou relevant de l'état de l'art ont retenu notre attention, mais ne sont pas directement liés aux contributions présentées dans cette thèse. Ainsi, il nous a tout particulièrement paru intéressant d'étudier par quelle suite de contributions théoriques nous en sommes arrivé à la théorie actuelle des dioïdes. Malgré l'existence de nombreuses bibliographies sur le sujet, nous justifions l'intérêt de cette partie par quelques publications qui n'avaient jusqu'alors pas été prises en compte. Un état de l'art sur les différents algorithmes permettant de calculer la valeur propre d'une matrice à coefficients dans un dioïde a aussi été effectué et intégré dans cette annexe.

B.1 Un historique de la théorie des dioïdes

La structure algébrique des dioïdes est encore peu habituelle, malgré des cas d'application de plus en plus nombreux dans les systèmes complexes contemporains, de fabrication humaine pour la plupart. Il nous a donc paru intéressant de proposer une remise en contexte de la théorie des dioïdes et de présenter les contributions scientifiques successives qui ont permis d'aboutir à cette théorie.

Certaines publications nous ont particulièrement aidé à réaliser cette annexe. Nous pouvons citer parmi elles [GM84, CMQV89, GP97, Pin98].

B.1.1 Fondements théoriques

Les dioïdes intègrent à la fois plusieurs branches de l'algèbre et peuvent être considérés sous plusieurs angles.

Tout d'abord, ce sont des structures algébriques, c'est-à-dire des ensembles munis de lois et de propriétés. Les différentes générations de mathématiciens Grecs furent parmi les premières à prendre conscience du fait que certains nombres n'ont pas les mêmes caractéristiques ; créant ainsi des catégories de nombres, qui correspondent généralement aux ensembles que l'on manipule ha-

bituellement de nos jours (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , etc.). Cependant, la théorie des ensembles ne date que de la fin du 19^e siècle, suite à une publication fondatrice de Georg Cantor en 1874 [Can74]. Les travaux de Georg Cantor définissent une théorie qui est, de nos jours, qualifiée de naïve, car elle ne permet pas de résoudre un certain nombre de paradoxes. Ainsi, Ernst Zermelo proposa une théorie axiomatique des ensembles pour palier ce problème [Zer08]¹.

Les dioïdes sont aussi des structures ordonnées, tout comme les treillis. Ces premiers ont donc pu profiter des développements apportés aux treillis [Bir40], telle que la théorie de la résiduation [Tar55].

Les ensembles de valeurs des dioïdes ne possèdent pas d'éléments négatifs². On peut donc faire le lien entre les matrices à coefficients dans un dioïde et les matrices positives [Min88], dont les premières mentions datent du 19^e siècle.

En remarquant que la loi \otimes dont est muni un dioïde n'est pas nécessairement inversible, on peut également faire référence aux structures non inversibles ou aux matrices singulières.

En outre, les structures algébriques de dioïdes sont par construction des demi-anneaux, mais ne peuvent pas être identifiées aux structures plus spécifiques telles que les corps et anneaux, bien connus de nos jours. Les recherches sur les demi-anneaux ont ainsi souffert de la notoriété de ces autres structures et un regain d'intérêt n'est apparu que dans les années 50 [Shi54, CG60, CG62, CH65, Pet67]. On peut aussi trouver quelques travaux traitant plus précisément des demi-anneaux sur des ensembles booléens [Yoe61, RF68], sur lesquels sont basés certains dioïdes de séries.

Les débuts de l'application de la théorie des dioïdes sont présentés dans la partie suivante.

B.1.2 Premières diffusions de la théorie des dioïdes

Premières applications concrètes

Dans les années cinquante, on commença à constater que certains problèmes d'optimisation discrète pouvaient être linéarisés dans un demi-anneau idempotent dont les opérateurs étaient choisis en fonction des besoins. Plusieurs travaux semblables ont été entrepris en parallèle, sans connaissance les uns des autres, et plusieurs écoles ont ainsi émergé. Ceci a engendré différentes appellations à être utilisées pour décrire les mêmes entités, pour se stabiliser autour d'« algèbre des dioïdes ».

Au cours d'études sur les réseaux de communication, Shimbel fut l'un des premiers à étudier des réseaux de communication en utilisant plus ou moins explicitement ces structures en 1954 [Shi54]. Toute une famille de problèmes basés sur la recherche d'un plus court chemin dans un graphe ont amené, en France, à donner à cette structure peu familière le nom d'« algèbre des chemins » [Gon75a, Gon75b], comme ce fut le cas dans une étude de Carré au début des années 70, portant sur la recherche de chemins extrémaux et posant les concepts de ce qu'il a appelé "path algebra" dans ses publications en langue anglaise [Car71, BC75, Car79].

Un autre pionnier fut l'Anglais Cuninghame-Green. Dès le début des années 60, il publia une approche basée sur ces structures algébriques, et lui donna le

1. cet article fut traduit bien plus tard en anglais et commenté dans [Zer67]

2. en ce sens qu'il n'existe pas de valeur plus petite que ε , élément neutre de la loi \oplus

nom de “minimax algebra” [CG60, CG62]. Cependant ces travaux furent restés sans développement jusqu’à la fin des années 70 [CG76, CG79]. Il fut l’un des premiers à retranscrire dans un dioïde les notions d’analyse spectrale (valeur propre, vecteur propre, etc.).

Débuts des « écoles » françaises

Le terme « dioïde » est une spécificité française. À l’étranger l’appellation « demi-anneau idempotent » l’emporte encore de nos jours. Jean Kuntzmann a été le premier à donner une définition d’un dioïde, en 1972 [Kun72], pour désigner une structure algébrique différente de celle que nous définissons dans cette thèse. Selon Kuntzmann, un dioïde est constitué d’un ensemble E muni de deux lois de composition internes \oplus et \otimes , telles que (E, \oplus) est un monoïde commutatif et (E, \otimes) est un monoïde avec une propriété de distributivité à gauche et à droite de \otimes par rapport à \oplus . C’est en quelque sorte un double monoïde. La définition de Kuntzmann est moins contraignante, car il n’impose pas à la somme d’être idempotente, ce qui permet aux monoïdes associés aux deux lois d’être des groupes³. Dans le courant des années 70, ces études ont été reprises par Gondran et Minoux. Dans ses premiers travaux publiés sur ce sujet, Minoux utilisait l’expression « structures algébriques généralisées » [Min76], sentant bien que ces nouvelles structures étaient justement plus faibles que les corps ou les anneaux. Puis ils ont utilisé le terme « dioïde » [GM77, GM78], pour faire référence à une structure algébrique un peu moins restrictive que la nôtre. En effet, Gondran et Minoux n’imposent pas non plus à la somme d’être idempotente (ils ne font que l’hypothèse d’un préordre canonique⁴). Ce sont aussi ces deux chercheurs qui ont fourni les contributions algébriques nécessaires à l’application d’une théorie spectrale dans les dioïdes. En effet, cette dernière nécessite la définition d’un moduloïde [GM77], pendant pour les dioïdes de l’espace vectoriel d’un corps, afin de manipuler des vecteurs, et en particulier des vecteurs propres. Le bidéterminant, utilisé pour des matrices d’éléments de demi-anneaux et correspondant au déterminant dans un corps, est apparu pour la première fois dans [Kun72] et a été remis à contribution dans les travaux de Gondran et Minoux [GM78, GM79]. Comme il n’existe pas de nombre négatif dans un dioïde, on ne peut pas réaliser de soustraction, comme on le ferait pour un déterminant classique. Ceci impose donc découpler les termes « positifs » des termes « négatifs », qui sont regroupés dans les deux termes du bidéterminant. D’autres correspondances entre les déterminants, bidéterminants, polynômes caractéristiques et bipolynômes caractéristiques peuvent être trouvées dans [GM02, chapitre 2].

La première référence explicite à la définition d’un dioïde ayant une somme idempotente remonte à 1985, dans les écrits de Cohen et al. [CDQV85b]. Se référant aux travaux de Cuninghame-Green, cette équipe de chercheurs de l’INRIA, formée autour de Guy Cohen, s’est officiellement créée en 1981 et a prolongé les cas d’application de cette structure algébrique dans le cadre de problèmes manufacturiers présentant des synchronisations [CDQV83, CMQV84,

3. dans son livre, ce qui se rapproche le plus de notre appellation a été appelé « gerbier », dont l’élément blanc est l’élément neutre de la somme

4. étant donné un monoïde commutatif $(\mathcal{M}, *)$, on peut toujours définir une relation de préordre (c’est-à-dire réflexive et transitive), notée \preceq , grâce à la loi $*$, telle que $\forall a, b \in \mathcal{M}, a \preceq b \Leftrightarrow \exists c \in \mathcal{M} : b = a * c$.

CDQV85a, CMQV89]. L'idée forte, remontant au mois d'août 1981 [CGQ99], fût de montrer qu'en changeant de structure algébrique, le comportement de certains systèmes à événements discrets pouvait être décrit à l'aide d'équations devenues linéaires. L'attention était portée sur l'évaluation de performances, dans une configuration déterministe. En particulier, [CDQV85a] présente l'analogie fondamentale existant entre la théorie des SDED et la théorie linéaire conventionnelle. Les SDED sont de nature monotone. En théorie classique des systèmes, le temps est la variable de base évoluant dans un seul sens et les autres variables peuvent évoluer en fonction du temps dans n'importe quelle direction à n'importe quel instant. Paradoxalement, les premières descriptions linéaires des SDED basées sur la structure algébrique « max-plus », notée \mathbb{Z}_{\max} et munie des deux lois max et +, avaient pour domaine de base les événements et non le temps. On manipulait donc des dateurs. Cette datation portait sur les événements successifs (comme la réalisation d'un nouveau produit fini) et permettait d'obtenir des variables d'état. Il a été montré pour la première fois dans [CMQV86] qu'une autre représentation d'état basée sur des variables indexées par le temps (des compteurs) était possible. Il est très vite apparu utile de pouvoir disposer d'une représentation graphique de ces phénomènes décrits par des équations dans \mathbb{Z}_{\max} . En parallèle à quelques résultats représentés sous forme de graphes de précedence des matrices caractéristiques des états des systèmes [CDQV83, CDQV85b], Didier Dubois proposa le formalisme des réseaux de Petri [DS83], et ce fut finalement la sous-classe des graphes d'événements temporisés qui fut adoptée [CMQV84, CDQV85a]⁵. Cette sous-classe a fait l'unanimité par la suite [CMQV89, Gau92, BCOQ92], jusqu'à nos jours. C'est aussi cette équipe de chercheurs qui développa en premier les notions de polynômes et de séries formelles dans les dioïdes [CMQV84, CDQV85b, CMQV86, CMQV89], afin de passer d'une représentation de systèmes sous forme de réponse impulsionnelle à des fonctions de transfert, via des transformées semblables à la transformée en \mathcal{Z} de l'automatique classique des systèmes discrets. Ceci permet de regrouper en un seul et unique élément toute la dynamique générale d'un système, au lieu d'étudier son comportement pour chaque valeur possible de ses entrées. De nombreuses publications issues du laboratoire LISA à Angers sont basées sur l'utilisation de séries formelles dans les dioïdes appropriés [Cot99, Lah00, CHBF01, Lho03, LHCJ04, Hou06, BCL08b]. Par ailleurs, dès le rapport de recherche [CDQV83], ces chercheurs ont proposé une transposition d'un certain nombre de résultats de la théorie spectrale, dans les structures algébriques de dioïdes, en se basant sur la définition d'un moduloïde proposée par Gondran et Minoux [GM77].

B.1.3 Les autres écoles dans le monde

En parallèle aux recherches issues d'Europe de l'Ouest a émergé une autre école, en Europe centrale et de l'Est. Les premiers écrits pouvant être rapportés à cette école remontent aux années 60 et 70 et font référence à ce qui était appelé « l'algèbre extrémale » [Vor63, Vor67, Vor70, Zim76]. Il est à noter que dans [Zim76] en particulier, les axiomes à la base des dioïdes utilisés sont encore plus forts que ceux de Cohen et al. (qui sont eux-mêmes plus forts que ceux Gon-

5. bien que publié postérieurement, la rédaction de l'article [CDQV85b], n'utilisant pas de RdP, a dû être complétée bien avant

dran et Minoux) : la loi \otimes est commutative et $a \oplus b = a$ ou b ⁶, ce qui garantit le caractère total de l'ordre de ce dioïde (la définition plus générale de Cohen et al. ne permet que de dire que cet ordre est partiel). On peut aussi trouver dans cette école d'autres études sur les chemins dans les graphes [Rom67, Zim81]. Certains de ces écrits présentaient déjà des études concernant la recherche de valeurs propres de matrices. Mais ce n'est qu'au début des années 90 que les premiers ponts se sont effectués et que les chercheurs d'Europe de l'Ouest ont commencé à référencer les travaux de leurs homologues situés dans des pays plus orientaux (Maslov est cité dans [BCOQ92] et Samborskiĭ est cité dans la thèse de Stéphane Gaubert [Gau92]). Il est à noter que des ponts ont aussi *physiquement* été passés, avec l'exemple de Peter Butkovič, qui est passé à la même période de l'université Košice (en actuelle Slovaquie) à celle de Birmingham en Angleterre, pour rejoindre Raymond A. Cuninghame-Green avec qui il a écrit un certain nombre d'articles en co-auteur⁷. À partir de la fin des années 80, d'autres scientifiques ont cherché à développer dans le domaine continu de nouvelles branches de l'analyse non linéaire en se basant sur des structures algébriques de dioïdes. Victor Maslov fut l'un des premiers à se lancer dans ces recherches. On lui doit le concept de mesure idempotente [Mas87a], ainsi que la transposition dans des demi-anneaux idempotents du principe de superposition [Mas87b], et du principe de correspondance de Bohr, bien connu en mécanique quantique [RN76]. Kolokol'tsov et Maslov, dans leur article [KM89] ont nommé cette approche analyse idempotente. Trois ouvrages de référence à ce sujet furent édités par la suite. Un par Maslov et Samborskiĭ [MS92] (incluant un article de Vassili Kolokol'tsov [Kol92]), un deuxième édité par Kolokol'tsov et Maslov [KM97] et un autre de Jeremy Gunawardena [Gun98] (incluant un article de Litvinov et Maslov [LM98]). On peut aussi citer les travaux de Grigory Litvinov, dont deux publications majeures qui suivirent : [LMS99, LMS01]. Par ailleurs, Gondran et Quadrat ont aussi travaillé sur cette approche⁸. Pour conclure sur cette école, les liens entre les études physiques et ces mathématiques idempotentes ont été clairement publiés dans un livre récent de Litvinov et Maslov : [LM05].

Suivant un regain d'intérêt dans les années 90, la recherche d'un chemin de poids maximal (c'est-à-dire le meilleur débit dans un flot) passe par l'utilisation d'une structure algébrique munie à la fois des lois max et min (ainsi que de l'addition classique). Le chercheur Néerlandais Geert Jan Olsder est l'un des chercheurs les plus reconnus pour avoir travaillé sur ces aspects [Ols91, Ols93, HOvdW05]. En se basant sur ces travaux, Jeremy Gunawardena a aussi apporté des contributions à ce domaine [Gun93, Gun94a, Gun94b], en plus de ses autres travaux sur l'analyse idempotente.

De l'école « tropicale », dont le Brésilien Imre Simon est le chercheur le plus renommé, est issue dans le courant des années 80 la notion de « demi-anneau tropical ». La parenté de ce terme est attribuée à la fois à Christian Choffrut, qui aurait proposé ce terme à Imre Simon [Sim88] et à Dominique Perron, qui aurait utilisé cette appellation en l'honneur d'Imre Simon lui-même [Pin98], après que ce dernier ait résolu un problème resté longtemps ouvert en théorie des langages [Sim78]. Cette structure algébrique est essentiellement appliquée dans le domaine de la théorie des langages et des automates [Sim78, Sim88,

6. on dit dans ce cas que la loi \oplus est sélective

7. dont une liste est disponible à l'adresse <http://web.mat.bham.ac.uk/P.Butkovic/Pubs.html>

8. cf. [GM02, Chapitre 7] pour plus de détails à ce propos

Sim94] et correspond à ce que Gondran et Minoux appellent un « dioïde sélectif-inversible » [GM02]. Le dioïde le plus communément appelé ainsi est le dioïde $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ [Max04], mais on peut aussi trouver dans la littérature les noms de dioïde « équatorial » ou « polaire », respectivement appliqués aux dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ et $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ [Mas86, Kro94].

B.1.4 Contributions plus récentes

Grigory Litvinov, en se basant sur les travaux de Sobolevskii, est aussi à la base de l'application dans une structure algébrique de dioïde de la théorie d'une analyse par intervalles [LS01]. L'objectif est de pouvoir prendre en compte des incertitudes (erreurs de modélisation et/ou variations paramétriques) en les incluant dans des intervalles. Ces deux chercheurs ont affirmé que les solutions d'équations basées sur des intervalles dans un dioïde peuvent être calculées en un temps polynomial, c'est-à-dire bien plus rapidement que dans le corps des réels. Mais cette affirmation est à nuancer par le fait que deux modèles à mêmes valeurs, mais basés sur deux structures algébriques différentes, ne représentent pas les mêmes problèmes. Il n'est donc pas question de donner une complexité inférieure à un problème en changeant simplement de point de vue (ici, de structure algébrique). Ces travaux ont été repris par Mehdi Lhommeau pour la synthèse de contrôleurs robustes, utilisés pour à des systèmes présentant des incertitudes [LHCJ04, Lho03]. Ce dernier a en particulier utilisé pour modèle graphique des graphes d'événements temporisés, dont le nombre de jetons et les temporisations associées aux places sont supposés évoluer dans un intervalle défini au moment de la modélisation [Lho03, LHCJ04].

Comme en automatique classique, il est possible de synthétiser une commande des systèmes. Concrètement, cette commande consiste à contrôler les entrées afin d'atteindre des performances spécifiées au préalable. Dans le cadre d'une problématique en juste-à-temps, cela consiste à retarder le plus possible l'entrée des jetons tout en respectant certains critères (comme la cadence). Ainsi, pour une consigne donnée et un système dont on connaît les caractéristiques, il s'agit de trouver quelles sont les entrées attendues. En quelque sorte, il est question d'inverser le système étudié. Cette pratique repose donc lourdement sur la mise en pratique de la théorie de la résiduation. Plusieurs types de commandes sont possibles, comme la commande optimale en boucle ouverte introduite dans [CMQV89], la synthèse d'un pré-compensateur optimal [Lib96, Cot99, AM03], la synthèse d'un correcteur de type retour de sortie [Cot99, CHBF01, AM03, Lho03], la commande en présence de perturbations [Lho03] ou la synthèse de contrôleurs robustes pour des systèmes incertains dans un dioïde d'intervalles [Lho03, LHCJ04].

Afin de réaliser des comparaisons entre fonctions, et non juste entre certaines valeurs de ces fonctions (par exemple pour connaître entre deux repères le temps de séjour pour un produit ou l'évolution d'un stock), une théorie du second ordre a été développée au début des années 90 [Plu91b, CGQ93]. Reposant sur l'opérateur classique de soustraction, les calculs de la théorie du second ordre reposent aussi sur la théorie de la résiduation, par obtention de la pseudo-inverse du produit (qui correspond à l'addition dans les dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$). Cette théorie a été réutilisée à partir de la fin des années 90, en particulier pour obtenir un critère de stabilité d'un modèle [Cot99, section 4.2] ou pour définir des marges [SMCH05]. Cette théorie a aussi été mise à contribution dans cette

thèse, afin de calculer des temps de séjour maximaux entre deux capteurs d'un système de production.

B.1.5 Bilan

Le dioïde le plus réputé étant le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$, dit « max plus », il existe une tendance à réutiliser ce nom pour tout ce qui touche de près ou de loin à une modélisation dans un dioïde. On parle ainsi d'« algèbre max plus » et de « max plus linéarité » [BCOQ92]. Cependant il n'existe pas entre toutes les écoles présentées de consensus sur ce terme. C'est pourquoi nous avons utilisé dans cette thèse la formule la plus neutre possible⁹, à savoir « structure algébrique de dioïde » (ou plus simplement « dioïde » quand le contexte s'y prête).

Pour finir, nous citons quelques ouvrages de référence. [BCOQ92] a permis de fédérer derrière un seul cadre algébrique les différentes communautés étudiant les SED (celles utilisant la théorie des files d'attente, les ordonnancements, ...). Cet ouvrage donne un considérable exposé des SED linéaires dans un dioïde et déterministes ou stochastiques tout en présentant de nouveaux résultats comme la symétrisation. L'ouvrage édité par Maslov et Samborskiï est la partie la plus visible du travail considérable de l'école de l'« analyse idempotente ». La collection d'articles éditée par Jeremy Gunawardena, quant à elle, consiste en la première vision d'ensemble des différentes approches et traditions sur le sujet [Gun98]. Il est aussi possible de consulter [CG79, Gau92, GM02, HOvdW05] pour obtenir de plus amples informations sur les dioïdes.

B.2 Aspects algorithmiques du calcul de la valeur propre d'une matrice dans un dioïde

Nous ne comptons pas présenter une bibliographie détaillée des différentes approches permettant de calculer la valeur propre d'une matrice dans un dioïde. Un état de l'art conséquent, réalisé en 1998 par Dasdan et Gupta, pourra être trouvé dans [DG98]. Nous ne présentons donc ici que les approches les plus classiques, et celles qui n'ont pas été étudiées dans ce dernier article.

B.2.1 Algorithme de Karp et quelques dérivés

L'algorithme le plus connu est celui qui a été proposé par Richard M. Karp à la fin des années 70 [Kar78]. Il s'applique à des matrices à n lignes et n colonnes et correspond à la recherche d'un circuit de poids moyen minimal dans un graphe. Sa complexité est de l'ordre de $O(n^3)$ ¹⁰, dans tous les cas. Une méthode basée sur l'application de cet algorithme a été présentée dans [GM79] et [BCOQ92]. De nos jours, peu d'autres algorithmes ou de cas particuliers permettent d'obtenir une meilleure complexité algorithmique. Cependant, on peut citer les exemples suivants : quand tous les poids des arcs d'un des circuits

9. afin, entre autre, de ne pas avoir à utiliser le terme « algèbre » qui signifie aussi une structure algébrique munie de deux lois de composition interne et d'une loi de composition externe ; ce qui n'est pas le cas ici

10. plus précisément, elle est en $O(n \times m)$ où n et m sont respectivement le nombre de sommets et le nombre d'arcs du graphe, qui possède donc n^2 arcs dans le pire des cas où tous les sommets sont reliés les uns aux autres

sont égaux au maximum des coefficients de la matrice, ou quand les coefficients de la matrice prennent au plus deux valeurs distinctes, cette complexité est réduite à $O(n^2)$ [BCG92]. Un autre exemple, aussi présenté dans [BCG92], permet d'utiliser un algorithme en $O(n)$, quand les coefficients a_{ij} de la matrice sont séparables ; c'est-à-dire quand on peut les formuler de la manière suivante : $a_{ij} = u_i + v_j, \forall i, j \in [1, n]$.

La complexité de l'algorithme de Karp est fixe, quel que soit le graphe considéré. Néanmoins, il est décrit dans [DG98] un algorithme mettant à profit les coefficients nuls de la matrice d'adjacence de ce graphe, afin d'obtenir une complexité de cas moyen en $O(n^2)$. Bien entendu, la complexité du pire des cas de ce dernier algorithme est aussi en $O(n^3)$. Malgré tout, l'algorithme de Karp est généralement préféré face à ce dernier, car il est plus simple à implanter.

B.2.2 Autres types d'algorithmes

Un autre algorithme, basé sur la méthode d'itération sur les politiques d'Howard, a aussi été développé dans [CTCG⁺98]. Cet algorithme montre de très bon résultats expérimentaux, mais aucune preuve de sa complexité algorithmique n'a encore pu en être formulée ; seule une estimation de cette complexité est proposée par ses auteurs. On constate en pratique que cet algorithme présente un temps d'exécution moyen en $O(n^2)$ et un temps d'exécution au pire évalué de l'ordre de $O(n^2 \log(n))$. D'un point de vue empirique, cet algorithme est meilleur que l'algorithme de Karp mais rien ne permet encore de l'affirmer formellement dans le cas général.

Une méthode dite « des puissances » a aussi été développée et appliquée dans un certain nombre de structures algébriques. Elle est notamment utilisée dans le corps usuel [GvL83], dans les dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ [BO93] et $(\overline{\mathbb{Z}}, \max, \times)$ [EvdD99, EvdD01] et dans la structure algébrique $(\min, \max, +)$ [SvdW00]. Dans le cas du dioïde $(\overline{\mathbb{Z}}, \max, \times)$ par exemple, la valeur propre d'une matrice est le poids de moyenne géométrique maximum des circuits de sa matrice d'adjacence. C'est le deuxième cas d'étude qui nous intéresse plus particulièrement dans le cadre de cette thèse. Cet algorithme peut être résumé ainsi : on applique les différentes puissances d'une matrice A à un vecteur d'état initial $X(0)$ arbitraire, jusqu'à obtenir une relation de cyclicité, c'est-à-dire quand $\exists p, q \in \mathbb{N}$ avec $p > q \geq 0$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $X(p) = c \otimes X(q)$ (cf. la définition 74). Afin d'obtenir la valeur propre, il suffit de diviser le gain c par la différence entre les deux paramètres p et q obtenus. Ainsi $\lambda = \frac{c}{p-q}$. Sa complexité algorithmique est en $O(n^4)$ [EvdD01, Section 2]. Cet algorithme a pour principal but de donner l'ensemble des vecteurs propres d'une matrice associés à sa ou ses valeurs propres. C'est pourquoi il présente un certain intérêt face à l'algorithme de Karp, bien qu'il soit bien plus lent.

L'algorithme présenté par Olsder et al. dans [ORvE99] a aussi pour but de trouver un circuit critique d'un graphe et de calculer l'ensemble maximal de vecteurs propres linéairement indépendants¹¹ associés à la valeur propre d'une matrice d'adjacence A de ce graphe. Cet algorithme possède une complexité en $O(n^3)$ [EvdD01], et est basé sur la procédure de Floyd-Warshall [GM79, page 58]¹². Il peut être résumé de la manière suivante. On considère tout d'abord

11. voir [GM78] pour la notion d'indépendance linéaire dans un dioïde

12. et [RF68] pour plus de précision sur l'algorithme en lui-même

une première valeur propre candidate en prenant le maximum des valeurs de la diagonale de A (si cette diagonale ne contient pas que des coefficients égaux à ε , sinon on prend le minimum de tous les coefficients de A). Ensuite, on calcule la matrice $A' = A - \mu J$ où J est la matrice ne contenant que des coefficients égaux à 1. Enfin on calcule les séries successives $\bigoplus_{k=1}^l A'^k$, pour l variant de 1 à n , en s'arrêtant à la première série dont les éléments de la diagonale contiennent au moins une valeur positive. Si l'on a effectué le calcul de la série jusqu'à n et qu'il n'y a pas de valeur positive dans la diagonale, alors μ est valeur propre de la matrice A . Sinon, il faut recommencer le calcul de ces séries en remplaçant la valeur de μ par la valeur du poids moyen du circuit contenant le sommet correspondant à l'une de ses valeurs positives (on modifie donc aussi la valeur de A').

On peut aussi noter l'existence d'algorithmes permettant de calculer la cadence (donc seulement la valeur propre) de systèmes dans la structure algébrique $(\min, \max, +)$ [Gun94a, GG98, Gun94b].

Bibliographie

- [AGW05] Marianne AKIAN, Stéphane GAUBERT et Cormac WALSH : *Discrete max-plus spectral theory*, pages 19 – 51. In LITVINOV et MASLOV [LM05], 2005. Disponible à l'adresse [arXiv:math/0405225](https://arxiv.org/abs/math/0405225).
- [AM03] Carlos ANDREY MAIA : *Identification et commande de systèmes à événements discrets dans l'algèbre $(\max, +)$* . Thèse de doctorat, Universidade estadual de Campinas, Campinas, Brésil, juillet 2003. En portugais.
- [AMHSMC03] Carlos ANDREY MAIA, Laurent HARDOUIN, Rafael SANTOS MENDES et Bertrand COTTENCEAU : Optimal Closed-Loop Control for Timed Event Graphs in Dioid. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48:2284 – 2287, 2003.
- [AS06] Michel AL SABA : *Contribution à la commande des systèmes flexibles de production manufacturière dans l'algèbre $(\max, +)$* . Thèse de doctorat, ISTIA – Université d'Angers, octobre 2006.
- [ASBL06] Michel AL SABA, Jean-Louis BOIMOND et Sébastien LAHAYE : On just in time control of flexible manufacturing systems via dioid algebras. In *Proceedings of the 12th IFAC Symposium on INformation COntrol problems in Manufacturing, INCOM'06*, volume 2, pages 137 – 142, Saint-Étienne, mai 2006.
- [ASLB06] Michel AL SABA, Sébastien LAHAYE et Jean-Louis BOIMOND : On Just In Time Control of Switching Max Plus Linear Systems. In *Proceedings of the 3rd International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, ICINCO'06*, Setúbal, Portugal, août 2006.
- [Bap98] Ravindra B. BAPAT : A max version of the Perron-Frobenius theorem. *Linear Algebra and its Applications*, 275 – 276:3 – 18, 1998.
- [BC75] Roland C. BACKHOUSE et Bernard A. CARRÉ : Regular Algebra Applied to Path-finding Problems. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 15(2):161 – 186, 1975.
- [BCG91] François BACCELLI, Guy COHEN et Bruno GAUJAL : Recursive Equations and Basic Properties of Timed Petri Nets. RR-1432, INRIA, mai 1991. Disponible à l'adresse www.inria.fr/rrrt/rr-1432.html.

- [BCG92] Peter BUTKOVIČ et Raymond A. CUNINGHAME-GREEN : An $O(n^2)$ algorithm for the maximum cycle mean of an $n \times n$ bivalent matrix. *Discrete Applied Mathematics*, 35:157 – 162, 1992.
- [BCL08a] Olivier BOUTIN, Bertrand COTTENCEAU et Anne L'ANTON : Commande de zones de conflits dans une algèbre de dioïde. *In Actes de la 7^e conférence internationale de MOdélisation et SIMulation, MOSIM'08*, Paris, mars 2008.
- [BCL08b] Olivier BOUTIN, Bertrand COTTENCEAU et Anne L'ANTON : Dealing with Mutual Exclusion Sections in Production Systems : from Shared Resources to Parallel TEG's. *In Proceedings of the 17th IFAC World Congress, IFAC'08*, Séoul, Corée du Sud, juillet 2008.
- [BCL10] Olivier BOUTIN, Bertrand COTTENCEAU et Anne L'ANTON : Shared Resources in Production Systems : (max,+) Analysis. *International Journal of Mathematics in Operational Research*, À paraître, novembre 2010.
- [BCLL09a] Olivier BOUTIN, Bertrand COTTENCEAU, Anne L'ANTON et Jean Jacques LOISEAU : Modélisation de systèmes de production à routages périodiques dans le dioïde \mathbb{Z}_{\min} . *In Actes des 3^{es} Journées Doctorales du GdR MACS*, Angers, mars 2009.
- [BCLL09b] Olivier BOUTIN, Bertrand COTTENCEAU, Anne L'ANTON et Jean Jacques LOISEAU : Modelling Systems with Periodic Routing Functions in Dioid (min,+). *In Proceedings of the 13th IFAC Symposium on INFORMATION CONTROL problems in Manufacturing, INCOM'09*, Moscou, juin 2009.
- [BCOQ92] François BACCELLI, Guy COHEN, Geert Jan OLSDER et Jean-Pierre QUADRAT : *Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems*. John Wiley and Sons, New York, 1992. Disponible à l'adresse cermics.enpc.fr/~cohen-g/documents/BCOQ-book.pdf.
- [BFG96] François BACCELLI, Serguei FOSS et Bruno GAUJAL : Free-Choice Petri Nets — An Algebraic Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(12):1751 – 1778, 1996.
- [Bir40] Garrett BIRKHOFF : *Lattice Theory*. Numéro XXV de American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, Rhodes Island, États Unis d'Amérique, 1940.
- [BJ72] Thomas S. BLYTH et Melvin F. JANOWITZ : *Residuation Theory*. Pergamon press, 1972.
- [BM60] John BANBURY et John MAITLAND, éditeurs. *Proceedings of the 2nd International Conference on Operational Research*, Aix-en-Provence, septembre 1960. English University Press.
- [BO93] Johannes Garrelt BRAKER et Geert Jan OLSDER : The Power Method in Max Algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 182:67 – 89, 1993.
- [BR84] Jean BERSTEL et Christophe REUTENAUER : *Les Series Rationnelles et leurs Langages*. Masson, Paris, 1984.

-
- [BR08] Marc BOYER et Olivier (H.) ROUX : On the compared expressiveness of Arc, Place and Transition Time Petri Nets. *Fundamenta Informaticae*, 88(3):225 – 249, 2008.
 - [Can74] Georg CANTOR : Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 77:258 – 262, 1874. En allemand.
 - [Car71] Bernard A. CARRÉ : An algebra for network routing problems. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, 7: 273 – 294, 1971.
 - [Car79] Bernard A. CARRÉ : *Graphs and Networks*. Clarendon Press, Oxford, Angleterre, 1979.
 - [CATBM09] Aurélien CORRÉIA, Abdeljalil ABBAS-TURKI, Rachid BOUYEKHF et Abdellah EL MOUDNI : A Diod Model for Invariant Resource Sharing Problems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part A : Systems and Humans*, 39(4):770 – 781, juillet 2009.
 - [CDQV83] Guy COHEN, Didier DUBOIS, Jean-Pierre QUADRAT et Michel VIOT : Analyse du comportement périodique de systèmes de production par la théorie des diodes. RR-0191, INRIA, février 1983. Disponible à l'adresse www.inria.fr/rrrt/rr-0191.html.
 - [CDQV85a] Guy COHEN, Didier DUBOIS, Jean-Pierre QUADRAT et Michel VIOT : A Linear-System-Theoretic View of Discrete-Event Processes and Its Use for Performance Evaluation in Manufacturing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(3):210 – 220, mars 1985.
 - [CDQV85b] Guy COHEN, Didier DUBOIS, Jean-Pierre QUADRAT et Michel VIOT : Une théorie linéaire des systèmes à événements discrets. RR-0362, INRIA, janvier 1985. Disponible à l'adresse www.inria.fr/rrrt/rr-0362.html.
 - [CG60] Raymond A. CUNINGHAME-GREEN : Process synchronisation in a steelworks - A problem of feasibility. In BANBURY et MAITLAND [BM60], pages 323 – 328.
 - [CG62] Raymond A. CUNINGHAME-GREEN : Describing Industrial Processes with Interference and Approximating their Steady-state Behaviour. *OR - Operational Research Quarterly*, 13(1):95 – 100, mars 1962.
 - [CG76] Raymond A. CUNINGHAME-GREEN : Projections in minimax algebra. *Mathematical Programming*, 10(1):111 – 123, décembre 1976.
 - [CG79] Raymond A. CUNINGHAME-GREEN : *Minimax algebra*, volume 166 de *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, 1979.
 - [CGQ93] Guy COHEN, Stéphane GAUBERT et Jean-Pierre QUADRAT : From First to Second-Order Theory of Linear Discrete Event Systems. In *Proceedings of the 12th IFAC World Congress*, Sydney, Australie, juillet 1993.

- [CGQ98] Guy COHEN, Stéphane GAUBERT et Jean-Pierre QUADRAT : *Algebraic System Analysis of Timed Petri Nets*. In GUNAWARDENA [Gun98], 1998.
- [CGQ99] Guy COHEN, Stéphane GAUBERT et Jean-Pierre QUADRAT : Max-Plus Algebra and System Theory : Where We Are and Where To Go Now. *Annual Reviews in Control*, 23:207 – 219, 1999.
- [CH65] Roger CRUON et Philippe HERVÉ : Quelques résultats relatifs à une structure algébrique et à son application au problème central de l'ordonnancement. *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, 34:3 – 19, février 1965.
- [CHBF99] Bertrand COTTENCEAU, Laurent HARDOUIN, Jean-Louis BOIMOND et Jean-Louis FERRIER : Synthesis of Greatest Linear Feedback for Timed Event Graphs in Dioid. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(6):1258 – 1262, 1999.
- [CHBF01] Bertrand COTTENCEAU, Laurent HARDOUIN, Jean-Louis BOIMOND et Jean-Louis FERRIER : Model Reference Control for Timed Event Graphs in Dioids. *Automatica*, 37:1451 – 1458, 2001.
- [CJK88] Michal P. CHYTIL, Ladislav JANIGA et Vaclav KOUBEK, éditeurs. *Mathematical Foundations of Computer Science 1988 : Proceedings of the 13th Symposium – Carlsbad, Czechoslovakia, August 29 – September 2, 1988*, volume 324 de *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, New York, 1988.
- [CMQV84] Guy COHEN, Pierre MOLLER, Jean-Pierre QUADRAT et Michel VIOT : Linear System Theory for Discrete Event Systems. In *Proceedings of the 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 539 – 544, Las Vegas, Nevada, États Unis d'Amérique, décembre 1984.
- [CMQV86] Guy COHEN, Pierre MOLLER, Jean-Pierre QUADRAT et Michel VIOT : Dating and Counting events in Discrete-Event Systems. In *Proceedings of the 25th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 988 – 993, Athènes, Grèce, décembre 1986.
- [CMQV89] Guy COHEN, Pierre MOLLER, Jean-Pierre QUADRAT et Michel VIOT : Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. *Proceedings of the IEEE*, 77(1):39 – 58, 1989. Special issue on Discrete Event Systems.
- [Coh95] Guy COHEN : Théorie algébrique des systèmes à événements discrets, 1995. Centre Automatique et Systèmes, École des Mines de Paris, Fontainebleau et INRIA, Rocquencourt. Notes de cours.
- [Coh98] Guy COHEN : Residuation and applications. In *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique*, numéro 26 de École de printemps d'informatique théorique, Île de Noirmoutier, mai 1998. INRIA.
- [Cot99] Bertrand COTTENCEAU : *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes*. Thèse de doctorat, ISTIA – Université d'Angers, octobre 1999.

-
- [CTCG⁺98] Jean COCHET-TERRASSON, Guy COHEN, Stéphane GAUBERT, Michael M^CGETTRICK et Jean-Pierre QUADRAT : Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra. *In IFAC Conference on System Structure and Control*, Nantes, juillet 1998.
 - [DA89] René DAVID et Hassane ALLA : *Du GRAFCET aux réseaux de Petri*. Hermès, Paris, 2^e édition, 1989.
 - [Dav95] René DAVID : Grafcet : A Powerful Tool for Specification of Logic Controllers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 3(3):253 – 268, 1995.
 - [DG98] Ali DASDAN et Rajesh K. GUPTA : Faster Maximum and Minimum Mean Cycle Algorithms for System-Performance Analysis. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 17(10):889 – 899, 1998.
 - [Dia01] Michel DIAZ, éditeur. *Les réseaux de Petri : modèles fondamentaux*. Hermès Science, Traité IC2, série informatique et systèmes d'information édition, 2001.
 - [DS83] Didier DUBOIS et Kathryn E. STECKE : Using petri nets to represent production processes. *In Proceedings of the 22nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1062 – 1067, San Antonio, Texas, États Unis d'Amérique, décembre 1983.
 - [EvdD99] Ludwig ELSNER et Pauline van den DRIESSCHE : On the power method in max algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 302 – 303:17 – 32, 1999.
 - [EvdD01] Ludwig ELSNER et Pauline van den DRIESSCHE : Modifying the Power Method in Max Algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 332 – 334:3 – 13, 2001. Proceedings of the 8th Conference of the International Linear Algebra Society, Barcelone, Espagne, 1999.
 - [Fli72] Michel FLIESS : *Sur certaines familles de séries formelles*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, décembre 1972.
 - [FNSE99] Phillip A. FARRINGTON, Harriet B. NEMBARD, David T. STURROCK et Gerald W. EVANS, éditeurs. *Proceedings of the 31st Winter Simulation Conference, WSC'99*, Phoenix, Arizona, États Unis d'Amérique, 1999. ACM Press.
 - [Gan59] Felix R. GANTMACHER : *The Theory of Matrices*, volume 2. Chelsea Publishing Company, 1959.
 - [Gau92] Stéphane GAUBERT : *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, juillet 1992.
 - [Gau93] Stéphane GAUBERT : Performance Evaluation of Timed Automata. RR-1922, INRIA, mai 1993. Disponible à l'adresse hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/07/47/52/PDF/RR-1922.pdf.
 - [Gau95] Stéphane GAUBERT : Performance Evaluation of (max,+) automata. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(12):2014 – 2025, décembre 1995.

- [GG98] Stéphane GAUBERT et Jeremy GUNAWARDENA : The duality theorem for min-max functions. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 326:43 – 48, 1998.
- [Gia88] Vincent GIARD : *Gestion de la production et des flux*. Economica, Paris, 1988. 3^e édition disponible.
- [GM77] Michel GONDRAN et Michel MINOUX : Valeurs et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes. *Bulletin de la Direction des Études et Recherches, série C (Mathématique, Informatique)*, (2):25 – 41, 1977.
- [GM78] Michel GONDRAN et Michel MINOUX : L'indépendance linéaire dans les dioïdes. *Bulletin de la Direction des Études et Recherches, série C (Mathématique, Informatique)*, (1):67 – 90, 1978.
- [GM79] Michel GONDRAN et Michel MINOUX : *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, 1^{re} édition, 1979. 3^e édition disponible.
- [GM84] Michel GONDRAN et Michel MINOUX : Linear algebra in dioids : a survey of recent results. *Annals of Discrete Mathematics*, 19:147 – 164, 1984.
- [GM99] Stéphane GAUBERT et Jean MAIRESSE : Modeling and Analysis of Timed Petri Nets using Heaps of Pieces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(4):683 – 697, avril 1999.
- [GM02] Michel GONDRAN et Michel MINOUX : *Graphes, dioïdes et semi-anneaux*. Tec & Doc, 2002.
- [Gon75a] Michel GONDRAN : Algèbre linéaire et cheminement dans un graphe. *RAIRO Informatique théorique et applications*, 9(1):77 – 99, 1975.
- [Gon75b] Michel GONDRAN : Algèbre des chemins et algorithmes. *Bulletin de la Direction des Études et Recherches, série C (Mathématique, Informatique)*, (2):57 – 64, 1975.
- [GP97] Stéphane GAUBERT et Max PLUS : Methods and Applications of $(\max, +)$ Linear Algebra. RR-3088, INRIA, janvier 1997.
- [GR82] Claude GIRAULT et Wolfgang REISIG, éditeurs. *Application and Theory of Petri Nets, Selected Papers from the First and the Second European Workshop on Application and Theory of Petri Nets, Stasbourg 23.-26. September 1980, Bad Honnef 28.-30. September 1981*, volume 52 de *Informatik-Fachberichte*. Springer, Berlin, 1982.
- [GR06] Michel GOURGAND et Fouad RIANE, éditeurs. *Actes de la 6^e conférence internationale de MODélisation et SIMulation, MO-SIM'06*, Rabat, Maroc, avril 2006.
- [Gun93] Jeremy GUNAWARDENA : Timing Analysis of Digital Circuits and the Theory of Min-Max Functions. In *TAU'93, ACM International Workshop on Timing Issues in the Specification and Synthesis of Digital Systems*, 1993.
- [Gun94a] Jeremy GUNAWARDENA : Cycle times and fixed points of min-max functions. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 266 – 266, 1994.

-
- [Gun94b] Jeremy GUNAWARDENA : Min-max Functions. *Discrete Event Dynamic Systems : Theory and Applications*, 4(4):377 – 407, 1994.
 - [Gun98] Jeremy GUNAWARDENA, éditeur. *Idempotency*. Cambridge University Press, 1998.
 - [GvL83] Gene H. GOLUB et Charles F. van LOAN : *Matrix Computations*. Oxford U. P., 1983.
 - [Har06] Laurent HARDOUIN : Outils de traitement de données manipulant les séries périodiques dans les dioïdes. www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/outils.html, 2006. Consulté le 9 octobre 2008.
 - [HC80] Yu-Chi HO et Christos G. CASSANDRAS : Computing co-state variables for discrete event systems. In *Proceedings of the 19th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 697 – 700, Albuquerque, Nouveau-Mexique, États Unis d’Amérique, décembre 1980.
 - [Hou06] Laurent HOUSSIN : *Contribution à la commande des systèmes (max, +)-linéaires. Applications aux réseaux de transport*. Thèse de doctorat, ISTIA – Université d’Angers, décembre 2006.
 - [HOvdW05] Bernd HEIDERGOTT, Geert Jan OLSDER et Jacob van der WOUDE : *Max Plus at Work – Modeling and Analysis of Synchronized Systems : A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications*. Princeton University Press, 2005.
 - [Kar78] Richard M. KARP : A characterization of the minimum cycle mean in a digraph. *Discrete Mathematics*, 23(3):309 – 311, 1978.
 - [Kha97] Wael KHANSA : *Réseaux de Petri p-temporels – Contribution à l’étude des systèmes à événements discrets*. Thèse de doctorat, Université de Savoie, mars 1997. Disponible à l’adresse <http://www.listic.univ-savoie.fr/Theses/thesekhansa.pdf>.
 - [Kle56] Stephen C. KLEENE : Representation of events in nerve nets and finite automata. In SHANNON et M^CCARTHY [SM56], pages 3 – 41.
 - [KM89] Vassili N. KOLOKOL’TSOV et Victor P. MASLOV : Idempotent analysis as a tool of control theory and optimal synthesis 1 and 2. *Functional Analysis and Its Applications*, 23:1 – 14; 53 – 62, 1989. Traduit du russe de Funktsional’nyi Analiz i Ego Prilozheniya.
 - [KM97] Vassili N. KOLOKOL’TSOV et Victor P. MASLOV : *Idempotent analysis and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
 - [Kol92] Vassili N. KOLOKOL’TSOV : On linear, additive, and homogeneous operators in idempotent analysis. In MASLOV et SAMBORSKIĬ [MS92], pages 87 – 102.
 - [Kot86] Laurent KOTT, éditeur. *Automata, Languages and Programming*, volume 226 de *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 1986.

- [Kro94] Daniel KROB : Some consequences of a Fatou property of the tropical semiring. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 93:231 – 249, 1994. Disponible à l'adresse hal.archives-ouvertes.fr/hal-00017321/fr/.
- [Kun72] Jean KUNTZMANN : *Théorie des réseaux (Graphes)*. Dunod, Paris, 1972.
- [Lah00] Sébastien LAHAYE : *Contribution à l'étude des systèmes non linéaires stationnaires dans l'algèbre des dioïdes*. Thèse de doctorat, Université d'Angers, octobre 2000.
- [LBT01] Jean-Yves LE BOUDEC et Patrick THIRAN : *Network Calculus - A Theory for Deterministic Queuing Systems for the Internet*, volume 2050 de *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2001.
- [LHCJ04] Mehdi LHOMMEAU, Laurent HARDOUIN, Bertrand COTTENCEAU et Luc JAULIN : Interval Analysis and Diod : Application to Robust Controller Design for Timed Event Graphs. *Automatica*, 40(11):1923 – 1930, novembre 2004.
- [Lho03] Mehdi LHOMMEAU : *Étude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre $(\max, +)$* . 1. Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles. 2. Synthèse de correcteurs en présence de perturbations. Thèse de doctorat, ISTIA – Université d'Angers, décembre 2003.
- [Lib96] Laurent LIBEAUT : *Sur l'utilisation des dioïdes pour la commande des systèmes à événements discrets*. Thèse de doctorat, Université de Nantes et École Centrale de Nantes, 1996.
- [LL86] Gilbert LABELLE et Pierre LEROUX, éditeurs. *Proceedings of the « Colloque de combinatoire énumérative », held at Université du Québec à Montréal, May 28 – June 1, 1985*, volume 1234 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1986.
- [LM98] Grigory L. LITVINOV et Victor P. MASLOV : *Correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications*, pages 420 – 443. In GUNAWARDENA [Gun98], 1998.
- [LM05] Grigory L. LITVINOV et Victor P. MASLOV, éditeurs. *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics, Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, 2005.
- [LMQ01] Pablo LOTITO, Elina MANCINELLI et Jean-Pierre QUADRAT : A Minplus Deviation of the Fundamental Car-Traffic Law. RR-4324, INRIA, novembre 2001.
- [LMS99] Grigory L. LITVINOV, Victor P. MASLOV et Andreï N. SOBOLEVSKIÏ : Idempotent Mathematics and Interval Analysis, 1999. Disponible à l'adresse www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:math/9911126.
- [LMS01] Grigory L. LITVINOV, Victor P. MASLOV et Grigory B. SHPIZ : Idempotent functional analysis : An algebraic approach. *Mathematical Notes*, 69(5):696 – 729, 2001.

-
- [LS01] Grigory L. LITVINOV et Andreï N. SOBOLEVSKIÏ : Idempotent Interval Analysis and Optimization Problems. *Reliable Computing*, 7(5):353 – 377, 2001.
 - [LW94] Jean Jacques LOISEAU et Édouard WAGNEUR : Solving Non-determinacy in Timed Petri Nets. *In Proceedings of the 2nd IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation*, pages 62 – 65, La Canée, Grèce, juin 1994. Disponible à l'adresse <http://med.ee.nd.edu/MED2-1994/proceedings.html>.
 - [Mas86] Jean-Paul MASCLE : *Torsion Matrix Semigroups and Recognizable Transductions*. Volume 226 de KOTT [Kot86], 1986.
 - [Mas87a] Victor P. MASLOV : *Méthodes opérationnelles*. MIR, Moscou, 1987.
 - [Mas87b] Victor P. MASLOV : On a new principle of superposition for optimization problems. *Russian Mathematical Surveys*, 42(3):43 – 54, 1987. Traduction anglaise d'un article paru en russe dans la revue *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*.
 - [Max04] Équipe MAXPLUS : Algèbres max-plus et mathématiques de la décision. Rapport technique, INRIA Rocquencourt, 2004.
 - [Mer74] Philip M. MERLIN : *A Study of the Recoverability of Computing Systems*. Thèse de doctorat, University of California, Irvine, Californie, États Unis d'Amérique, 1974.
 - [Min76] Michel MINOUX : Structures algébriques généralisées des problèmes de cheminement dans les graphes : Théorèmes, algorithmes et applications. *RAIRO Recherche Opérationnelle*, 10(6):33 – 62, 1976.
 - [Min88] Henryk MINK : *Nonnegative Matrices*. Wiley, 1988.
 - [Mol88] Pierre MOLLER : *Théorie algébrique des systèmes à événements discrets*. Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, Paris, 1988.
 - [Moo66] Ramon E. MOORE : *Interval Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, États Unis d'Amérique, 1966.
 - [MS82] Javier MARTÍNEZ et Manuel SILVA : A simple and fast algorithm to obtain all invariants of a generalized Petri net. *In GIRAULT et REISIG [GR82]*, pages 301 – 310.
 - [MS92] Victor P. MASLOV et Serguei N. SAMBORSKIÏ, éditeurs. *Idempotent Analysis*, volume 13 de *Advances in Soviet Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhodes Island, États Unis d'Amérique, 1992.
 - [Mur89] Tadao MURATA : Petri Nets : Properties, Analysis and Applications. *Proceedings of the IEEE*, 77(4):541 – 580, avril 1989.
 - [MWCM98] Deborah J. MEDEIROS, Edward F. WATSON, John S. CARSON et Mani S. MANIVANNAN, éditeurs. *Proceedings of the 30th Winter Simulation Conference, WSC'98*, Washington, District de Columbia, États Unis d'Amérique, 1998.

- [Ols91] Geert Jan OLSDER : Eigen Values of Dynamic Max-Min Systems. *Discrete Event Dynamic Systems : Theory and Applications*, 1: 177 – 207, 1991.
- [Ols93] Geert Jan OLSDER : Analyse de systèmes min-max. RR-1904, INRIA - Sophia Antipolis, mai 1993.
- [ORvE99] Geert Jan OLSDER, Kees ROOS et Robert Jan van EGMOND : An efficient algorithm for critical circuits and finite eigenvectors in the max-plus algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 295:231 – 240, 1999.
- [Pet62] Carl Adam PETRI : *Kommunikation mit Automaten*. Thèse de doctorat, Rheinisch-Westfälisches Institut für Instrumentelle Mathematik an der Universität Bonn, 1962. Schrift Nr 2.
- [Pet67] Vasile PETEANU : An algebra for the optimal path in networks. *Mathematica*, 9:335 – 342, 1967.
- [Pin98] Jean-Éric PIN : *Tropical Semirings*, pages 50 – 69. In GUNAWARDENA [Gun98], 1998.
- [Plu91a] Max PLUS : A Linear System Theory for Systems Subject to Synchronization and Saturation Constraints. In *Proceedings of the 1st European Control Conference*, Grenoble, juillet 1991.
- [Plu91b] Max PLUS : Second Order Theory of Min-Linear Systems and its Application to Discrete Event Systems. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Brighton, Royaume-Uni, décembre 1991.
- [Ram74] Chander RAMCHANDANI : *Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Petri Nets*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, États Unis d'Amérique, février 1974. TR-120.
- [Rei96] Klaus REINHARDT : Reachability in Petri Nets with Inhibitor arcs. Rapport technique WSI-96-30, Wilhelm-Schickard Institut für Informatik, Universität Tübingen, 1996.
- [RF68] Pierre ROBERT et Jacques FERLAND : Généralisation de l'algorithme de Warshall. *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, série rouge*, 2(1):71 – 85, 1968.
- [RN76] Léon ROSENFELD et Jens Rud NIELSEN, éditeurs. *Niels Bohr, Collected Works, The correspondence principle (1918-1923)*, volume 3. North-Holland, Amsterdam, Pays-Bas, 1976.
- [Rom67] Joseph V. ROMANOVSKIĭ : Optimization of stationary control of a discrete deterministic process. *Kibernetika*, 3(2):71 – 83, 1967. En russe.
- [Shi54] Alfonso SHIMBEL : Structure in communication nets. In *Proceedings of the symposium on information networks*, pages 199 – 203. Polytechnic Institute of Brooklyn, 1954.
- [Sim78] Imre SIMON : Limited Subsets of a Free Monoid. In *Proceedings of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 143 – 150, 1978.

-
- [Sim88] Imre SIMON : Recognizable Sets with Multiplicities in the Tropical Semiring. In CHYTIL *et al.* [CJK88], pages 107 – 120.
 - [Sim94] Imre SIMON : On Semigroups of Matrices over the Tropical Semiring. *RAIRO Informatique théorique et applications*, 28(3 – 4):277 – 294, 1994.
 - [SM56] Claude E. SHANNON et John M^cCARTHY, éditeurs. *Automata Studies*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, États Unis d'Amérique, 1956.
 - [SMCH05] Rafael SANTOS MENDES, Bertrand COTTENCEAU et Laurent HARDOUIN : Adaptive Feedback Control for (max,+)-linear Systems. In *Emerging Technologies Factory Automation'05*, Catane, Italie, 2005.
 - [SvdW00] SUBIONO et Jacob van der WOUDE : Power Algorithms for (max, +)- and Bipartite (min, max, +)-Systems. *Discrete Event Dynamic Systems : Theory and Applications*, 10:369 – 389, 2000.
 - [Tar55] Alfred TARSKI : A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific Journal of Mathematics*, 5(2):285 – 309, 1955.
 - [TKG07] Benoît TROUILLET, Ouajdi KORBAA et Jean-Claude GENTINA : Formal Approach of FMS Cyclic Scheduling. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part C : Applications and Reviews*, 37(1):126 – 137, 2007.
 - [vdBDS04] Ton J. J. van den BOOM et Bart DE SCHUTTER : Modelling and control of discrete event systems using switching max-plus-linear systems. In *Proceedings of the 7th International Workshop on Discrete Event Systems, WODES'04*, pages 115 – 120, Reims, septembre 2004.
 - [vH67] Jean van HELJENOORT, éditeur. *From Frege to Gödel : A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Harvard University Press, 1967.
 - [Vie86] Xavier Gérard VIENNOT : Heaps of pieces, I : Basic definitions and combinatorial lemmas. In LABELLE et LEROUX [LL86], pages 321 – 350.
 - [Vor63] Nikolai N. VOROBYEV : The extremal matrix algebra. *Soviet mathematics - Doklady*, 4:1220 – 1223, 1963.
 - [Vor67] Nikolai N. VOROBYEV : Extremal algebra of positive matrices. *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik*, 3:39 – 71, 1967. En russe.
 - [Vor70] Nikolai N. VOROBYEV : Extremal algebra of nonnegative matrices. *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik*, 6:302 – 312, 1970.
 - [Wag91] Édouard WAGNEUR : Moduloïds and pseudomodules. 1. Dimension theory. *Discrete Mathematics*, 98:57 – 73, 1991.
 - [WD99] Édouard WAGNEUR et Isabel DEMONGODIN : On the rational use of Petri nets, automata and the max algebra for the optimal

- control of DEDS. In *Proceedings of the 8th International Workshop on Petri Nets and Performance Models*, pages 179 – 186, Saragosse, Espagne, 1999.
- [YCSC02] Enver YÜCESAN, Chun Hung CHEN, Jane L. SNOWDON et John M. CHARNES, éditeurs. *Proceedings of the 34th Winter Simulation Conference, WSC'02*, San Diego, Californie, États Unis d'Amérique, 2002.
- [Yoe61] Michael YOELI : A Note on a Generalization of Boolean Matrix Theory. *The American Mathematical Monthly*, 68(6):552 – 557, 1961.
- [Zer08] Ernst ZERMELO : Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. *Mathematische Annalen*, 65:261 – 281, 1908. En allemand.
- [Zer67] Ernst ZERMELO : Investigations in the foundations of set theory I. [vH67], pages 199 – 215.
- [Zim76] Karel ZIMMERMAN : *Extremální Algebra*. Československá akademie věd Ekonomicko – Matematická Laboratoř, přiekonomickém ústavu, Prague, République tchèque, 1976. En tchèque.
- [Zim81] Uwe ZIMMERMANN : *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures*. Numéro 10 de Annals of Discrete Mathematics. North Holland, 1981.

Modélisation de conflits et calcul de bornes dans les systèmes de production par la théorie des dioïdes

Les systèmes de production de type flow-shop sont des systèmes déterministes qui peuvent être modélisés analytiquement de manière relativement aisée dans une structure algébrique de dioïde. Les opérations dont est muni un dioïde sont essentiellement basées sur des phénomènes de synchronisation et de délai, ce qui permet d'aboutir à un modèle linéaire. Cependant, les systèmes de production manufacturiers présentent de plus en plus d'éléments hétérogènes en interaction et font ainsi partie d'une classe plus générale de systèmes, les job-shops. Ces interactions se caractérisent parfois par des conflits ; dès lors, une modélisation analytique linéaire n'est plus possible.

En considérant un système à conflits, non plus directement, mais via ses comportements extrémaux, il est possible d'en obtenir une modélisation approchée, qui est linéaire dans un dioïde d'intervalles. Moyennant l'utilisation de règles d'affectation des ressources partagées et de politiques de routage appropriées, nous définissons des modèles linéaires de ces sections. On propose un modèle approché, dans un dioïde d'intervalles, de ces systèmes complexes, afin de bénéficier des contributions théoriques des structures algébriques de dioïde.

Par ailleurs, les réseaux de Petri forment un outil graphique privilégié pour la représentation des systèmes dynamiques à événements discrets que sont les systèmes de production. Nous proposons une définition de la sémantique d'une sous-classe bien particulière de ces réseaux : les graphes d'événements temporisés à incertitudes temporelles, qui permettent de retranscrire des relations exprimées dans un dioïde d'intervalles.

En somme, notre contribution permet d'étudier certains job-shops, alors que les possibilités actuelles se limitaient à l'étude de flow-shops.

Mots-clés : Modélisation formelle, routages, ressources partagées, structures algébriques de dioïdes, analyse par intervalles, réseaux de Petri.

Modelling of Conflicts and Bounds Estimation in Production Systems Thanks to Dioid Theory

Flow-shops are manufacturing deterministic systems which can be analytically modelled in a fairly easy way, in a dioid algebraic structure. Dioids are endowed with operations mostly based on synchronisation and delay phenomenon, which leads to a linear model. Nevertheless, production systems consist of an increasing number of heterogeneous and interacting elements, which turns them into job-shops. These interactions are sometimes conflicts ; therefore, an analytical model cannot be designed any more.

Not considering accurately a system with conflicts, but rather thanks to its extremal behaviours, the former can be modelled in an approximated way, which turns to be linear modelling in a dioid of intervals. Provided the use of appropriate shared resources assignment rules and routing policies, we define linear models of those sections. We give an approximated model, in a dioid of intervals, of those complex systems, which allows for using dioid algebraic structure theory contributions.

Besides, discrete event dynamic systems, and in particular production systems, are often depicted by Petri nets. We define in this thesis the semantics of a particular sub-class of Petri nets : timed event graphs with time uncertainties, which correspond to systems of relations expressed in a dioid of intervals.

Finally, our contribution allows for the study of some job-shops, while it was only possible to study flow-shops.

Keywords : Formal modelling, routing, shared resources, dioid algebraic structures, interval analysis, Petri nets.

Discipline : Génie informatique, automatique et traitement du signal.